當 Pólya 碰上 Cabri

馮振業

香港教育學院數學系

猜想何價

數學解難研究鼻祖 George Pólya 非常重視讓學生猜想。他除了指出猜想是可以教授之外，還強調蒐集證據，反覆觀察規律在形成猜想的過程上的重要性。在他而言，有意義的猜想，必須是有意識和有基礎的，絕不應是瞎猜（Pólya，1984a, 1984b）。

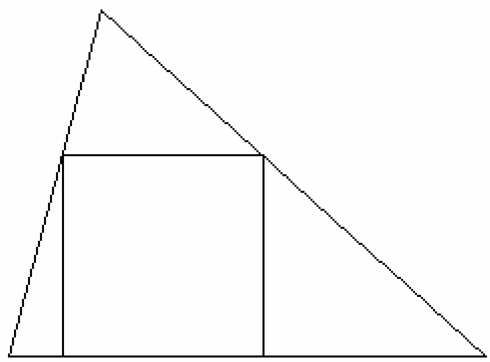
目前香港一般的數學教學，甚少有讓學生猜想的機會。當中原因頗多，眾說紛紜：課程緊迫、秩序問題、學生水平低落、教師專業水平欠佳……姑勿論上述哪個原因影響較大，有一點可以肯定，就是蒐集和觀察證據需時不少，如果學生不願或不能專注一段長的時間，又或者教師沒有信心或能力策動長時間的探究活動，這種猜想的空間註定是沒有的了！

本文欲舉一個例子，說明由互動機何軟件所帶來的時間壓縮，如何使蒐集和觀察證據的過程變得不再漫長。

解難一例

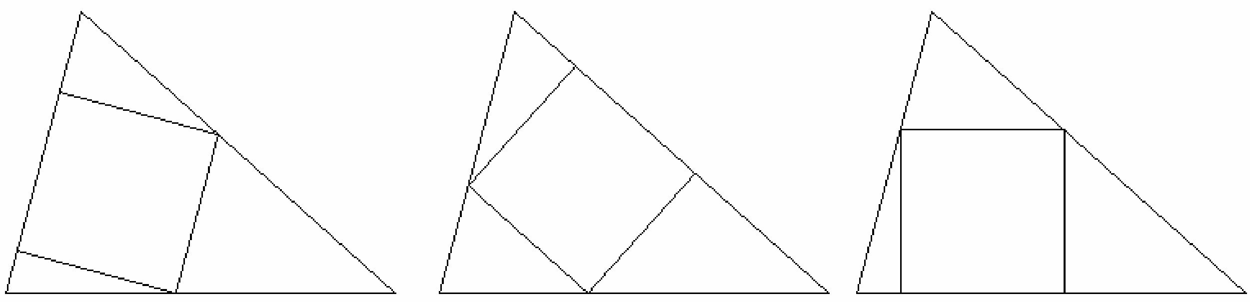
以下是一道 George Pólya 曾經引用的幾何題（Pólya，1957）：

> 以尺規在一任意三角形內作一個正方形，使它的頂點都落在三角形的邊上（圖一）。



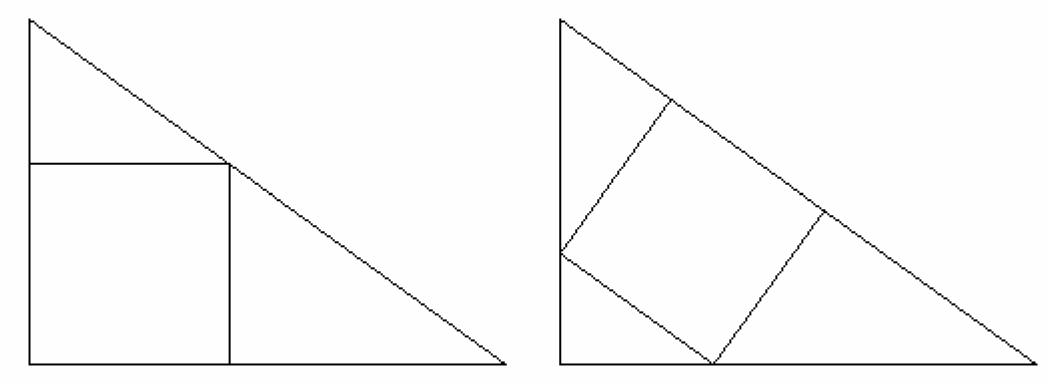
圖一

不難發現，如果給定的是銳角三角形，則可有三個不同的位置（即正方形的一邊與三角形任何一邊重疊均可）作出所需的正方形（圖二）。



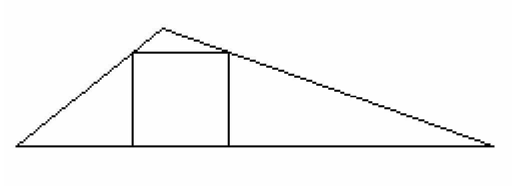
圖二

如果三角形有一直角，則只有兩個可能（圖三）。



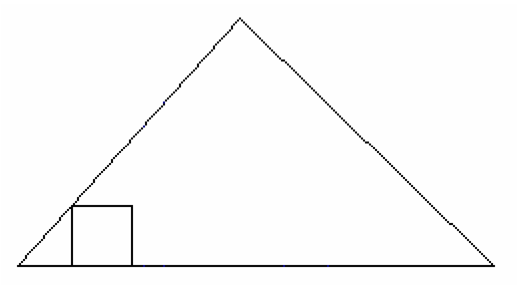
圖三

當三角形有一鈍角，則只有一種可能（圖四）。



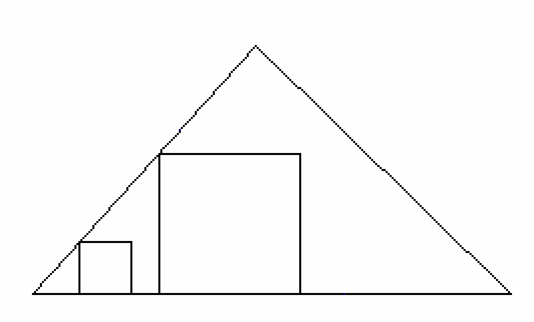
圖四

Pólya 以這道題，示範解難的一個重要策略：「如果不能解決眼前的問題，可先嘗試一個相關的問題。」他建議引導解難者先棄掉部份的條件，由此，解難者應可作出一個只有三個頂點落在三角形的邊上的正方形（圖五）。



圖五

進一步，解難者亦會發現這樣的正方形有很多（圖六）。



圖六

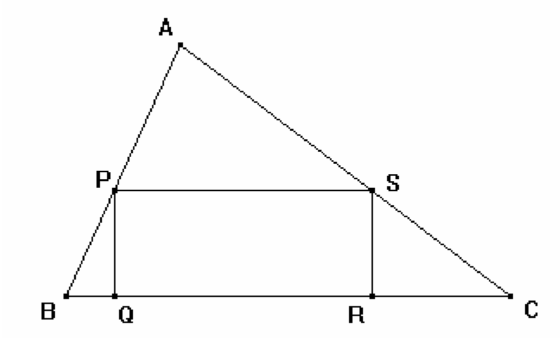
若要引導解難者朝著成功的方向走，可著他（她）注意第四個（不在三角形邊上的）正方形頂點的位置可以怎樣變化。至此，解難者必須作更多這樣的正方形，並對這個第四頂點的位置作深入觀察。

互動幾何

　　爲了洞悉當中可能潛在的規律，這些作圖不可能太過粗疏，否則可能錯誤引導了思考的方向，最終徒勞無功。不要說純以尺規作圖，就是加上了直角尺，這一系列的工作也必用上最少七、八分鐘課堂時間，還沒有算上觀察和師生對話的時間。

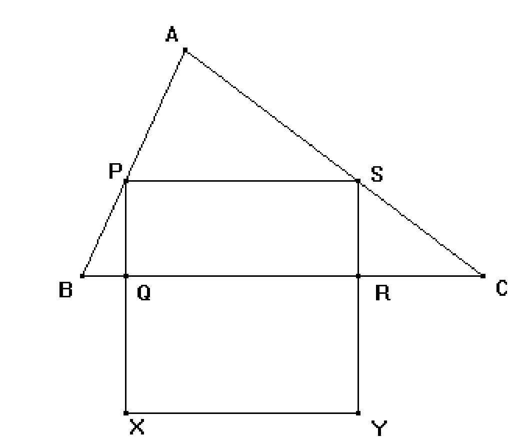
　　有了互動幾何軟件，這部份的時間可以大大壓縮，加上作圖的質素有保證，有效提高解題的興趣和成功率。筆者曾利用 Cabri Geometry II 與幾位在職教師一起攻擊這個問題。

在棄掉部份條件的階段，便有人提出可以作出適用的矩形（圖七）。



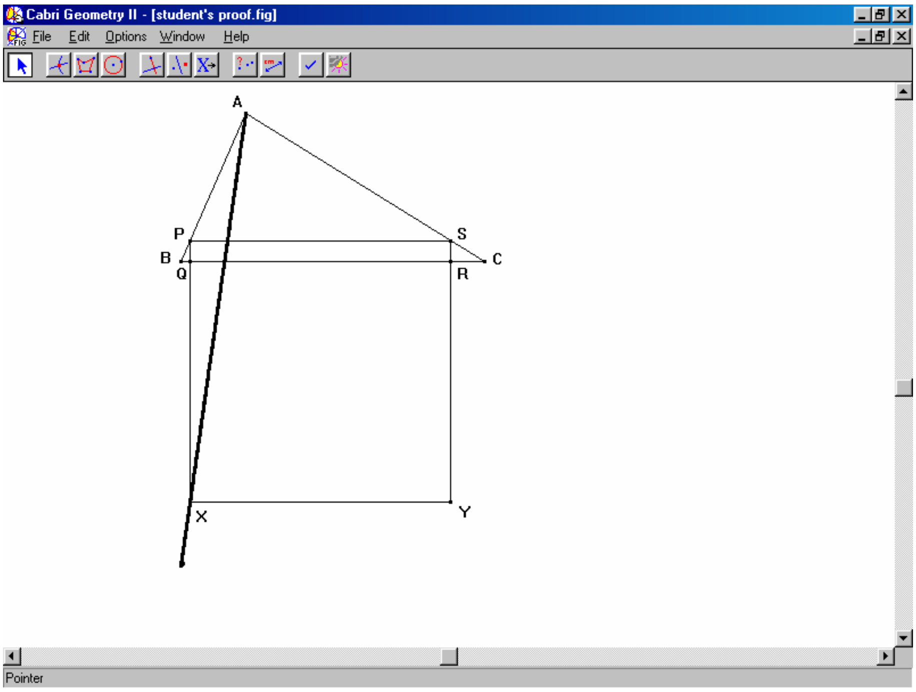
圖七

經一些簡短的對話，大家便開始考慮以 *PS* 爲一邊的正方形 *PXYS* 在甚麼時候與矩形 *PQRS* 重疊（圖八）。



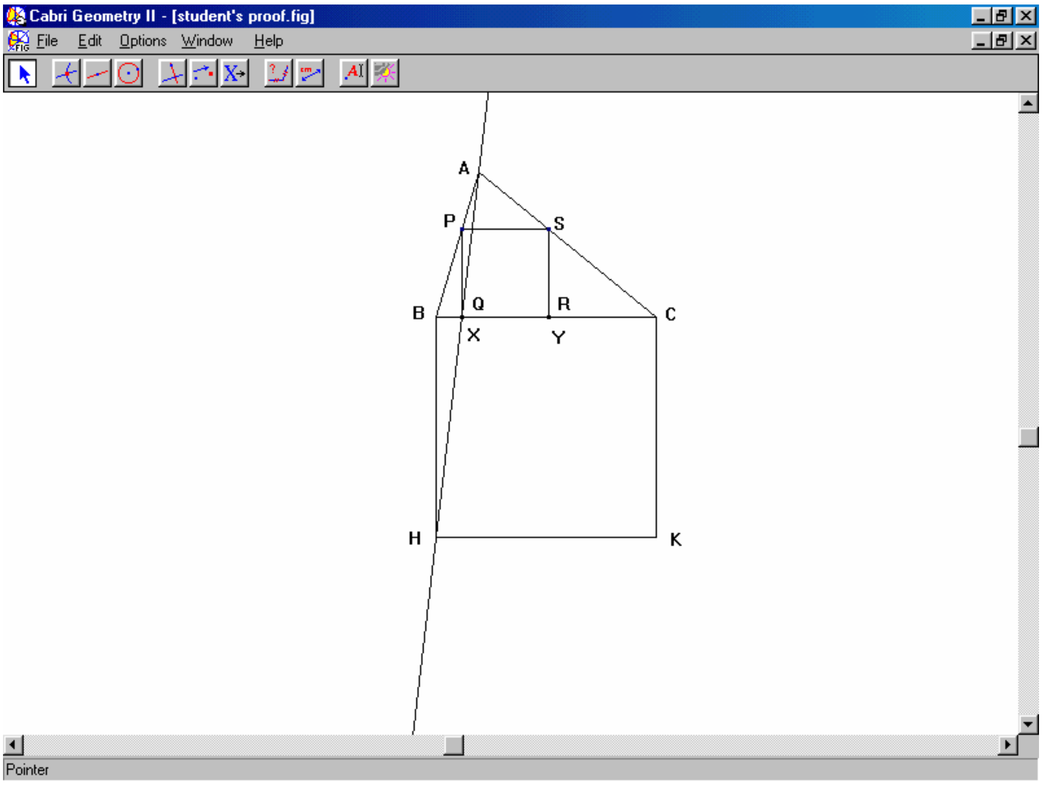
圖八

有了“Trace”這個功能，大家很快便可印出當 *P* 點在 *AB* 上滑行時，*X* 的軌跡（圖九）。



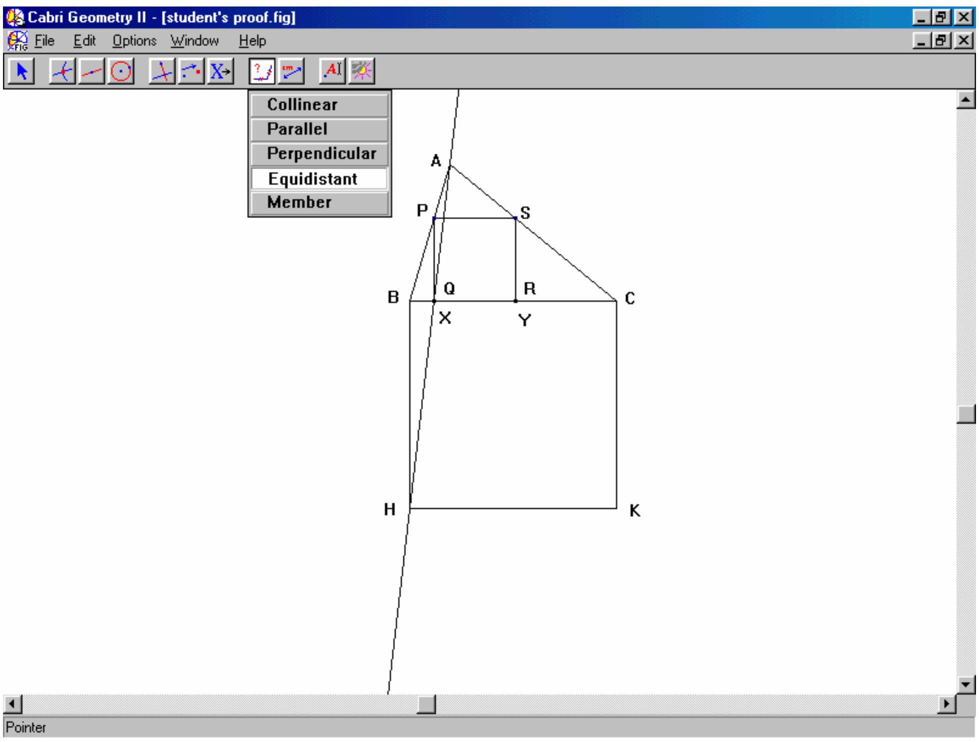
圖九

X 的足印提供了形成猜想的重要線索，加上考慮 P 在 A 和 B 的兩個極端位置，大家很快便猜想可在 BC 上作一向下的正方形 $BHKC$，再把 H 與 A 連一直線。這直線與 BC 相交的位置，便剛好是 X 與 Q 重疊的位置（圖十）。



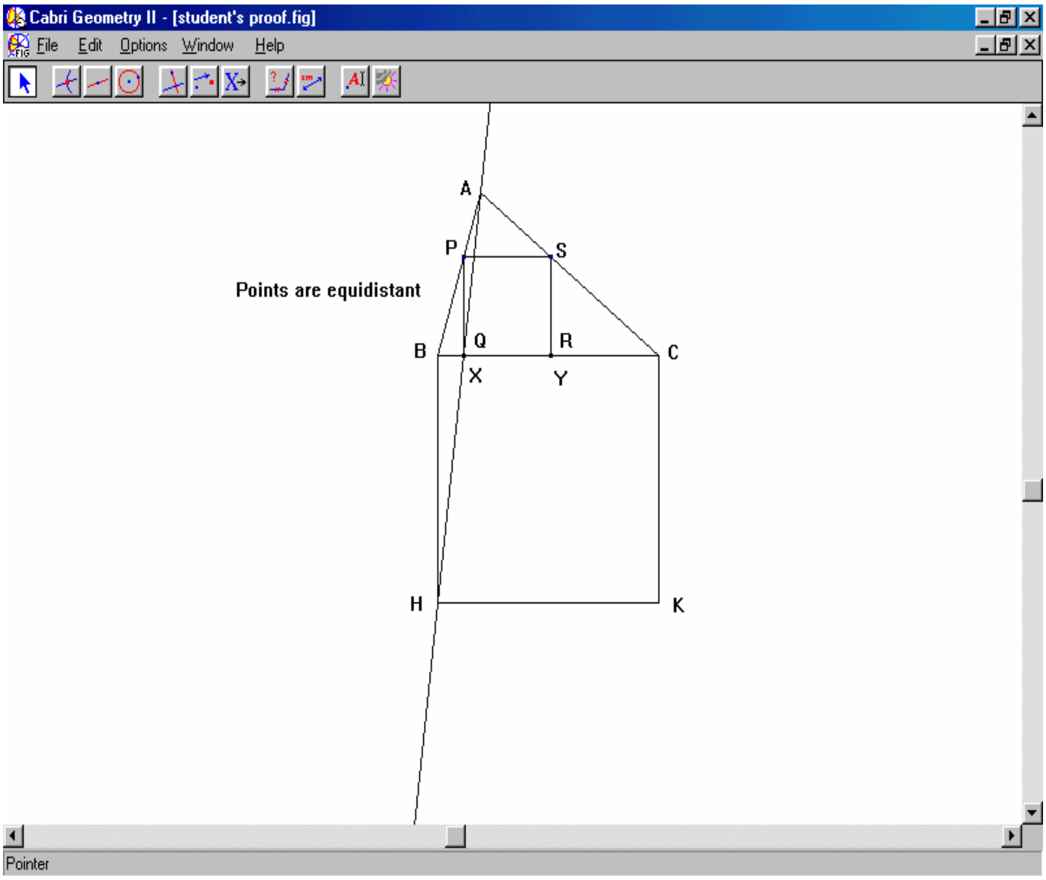
圖十

謹慎起見，大家再利用「測試菜單」(Testing Menu)中的 “Equidistant”，檢查矩形 *PQRS* 是否滿足 $PQ = PS$ （圖十一）。



圖十一

結果猜想得到肯定（圖十二）。



圖十二

上面所說的探究歷程，在 12 分鐘內輕鬆完成。時間所限，我們並未為這個作圖法找出一個演繹的證明。儘管如此，發現數學的樂趣已盡在其中，補回所需的證明不過是一道常規的習題而已（見附錄）。

結語

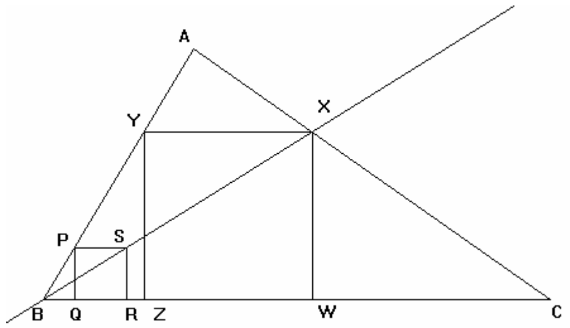
也許目前教授數學的最大障礙是時間。這不是說我們的上課時間不足或課程內容太多，而是指主流氣氛追求快見成果的浮誇心態：成人世界往往不重視踏實的、按部就班的學習和鑽研；孩子往往認為兩分鐘內想不出

的問題就永遠不可能解決。如果我們要學生學會數學，就必須讓他們經歷創造數學的艱苦過程。而互動幾何軟件的存在，應有助教師重拾逐漸失去的數學教育的崇高理想。

附錄

命題一

設ΔABC 有銳角於 B，並內藏正方形 $PQRS$，其中 P 在 AB 上而 QR 在 BC 上。



圖十三

若 BS 延長與 AC 交於 X，而 $XYZW$ 爲一矩形，其中 Y 在 AB 上，Z、W 在 BC 上（圖十三），則 $XYZW$ 爲一正方形。

證：

只需證明 $XY = XW$。

由 $\Delta BXY \sim \Delta BSP$ 得

$$\frac{XY}{SP} = \frac{BX}{BS} \quad ; \quad \rule{3cm}{0.4pt} \quad (1)$$

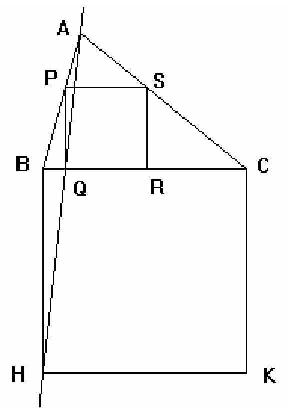
由 $\Delta BXW \sim \Delta BSR$ 得

$$\frac{BX}{BS} = \frac{XW}{SR} \quad 。 \qquad \text{——————} \qquad (2)$$

(1)和 (2) 推得 $\frac{XY}{SP} = \frac{XW}{SR}$。再加上正方形 $PQRS$ 上 $SP = SR$，便知 $XY = XW$。

<u>命題二</u>

設 ΔABC 有銳角於 B，而 $BHKC$ 爲一正方形，其中 A 和 H 在 BC 的兩邊。若 AH 與 BC 交於 Q，而且 $PQRS$ 爲一矩形，其中 P 在 AB 上，R 和 S 分別在 BC 和 AC 上（圖十四）。，則 $PQRS$ 爲一正方形。



圖十四

證：

只需證明 $PQ = PS$。

由 $\Delta APQ \sim \Delta ABH$ 得

$$\frac{PQ}{BH} = \frac{AP}{AB} \quad ; \qquad \text{——————} \qquad (3)$$

由 $\Delta APS \sim \Delta ABC$ 得

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PS}{BC} \quad 。 \qquad \text{——————} \qquad (4)$$

(3) 和 (4) 推得 $\frac{PQ}{BH}=\frac{PS}{BC}$。再加上正方形 $BHKC$ 上 $BH = BC$，便知 $PQ = PS$。

參考資料

Pólya, G. (1957). *How to solve it (2nd ed).* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1984a). Let us teach guessing. In G.-C. Rota (Ed.), *George Pólya: Collected papers, vol. 4,* pp.504-511. Cambridge, MA: MIT Press.

Pólya, G. (1984b). Ten commandments for teachers. In G.-C. Rota (Ed.), *George Pólya: Collected papers, vol. 4,* pp.525-533. Cambridge, MA: MIT Press.