「分步除法」的數學原理

葉嘉慧

聖公會榮真小學

馮振業

香港教育學院數學系

教授除法時，需要讓學生有一套完整的概念（均分和包含的意義）和經歷數學化的過程。透過運用符號去記錄實物的操作，逐漸過渡到純符號的運算（馮振業、王倩婷、葉嘉慧、何妙珍，2000）。有了這些基礎的認識，學生便可以開始探索更深刻的數學關係。在《數學化教學—除法》，我們介紹了詭異的「分步除法」（工作紙十四）。它利用了「除法算法」（Division Algorithm）中，商和餘數的唯一性，再透過因子分解除數，把一題除數化成連續兩步或更多步的除數來計算。如果學生在除數爲兩位數時，對試商所帶來的沉重運算壓力感到吃不消，這個「分步除法」在除數可因子分解爲一位數乘積的情況下，可幫助繞過試商，回到除數爲一位數的輕鬆處境。本文將集中解釋其中的數學原理，並試圖將看似艱深的抽象數學，以簡單的分物活動說明。

根據「除法算法」，若 α 和 β 爲正整數，則存在唯一的非負整數 q 和 r，使得 $\beta = q\alpha + r$，其中 $0 \le r < \alpha$。這裡 q 和 r 分別是所求的商和餘數。我們將會利用這個定理來解說「分步除法」的原理。首先處理整除的情況：

若 a 和 b 爲正整數，而且 a 能被 b 整除，

則存在唯一（正）整數 c 使

$$a = bc。 \qquad \ldots\ldots.. (1)$$

設 $b = mn$，那麼 a 必可被 m 整除。換言之，存在（正）整數 d 使

$a = md$。 ....(2)

由於 a 能被 b 整除，故 d 亦能被 n 整除，即存在（正）整數 e 使

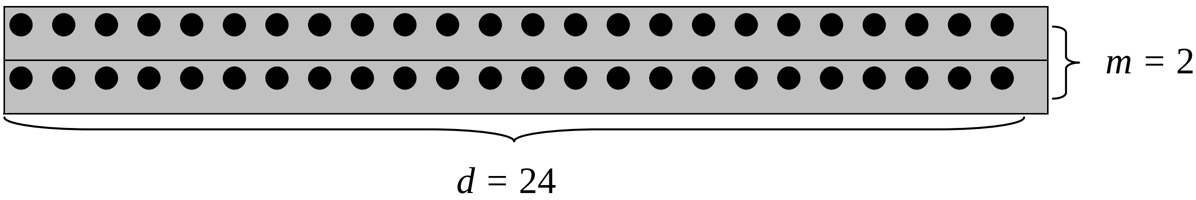
$d = ne$。 ....(3)

從(2)和(3)得出 $a = mne$，即 $a = be$。再由(1)式中 c 的唯一性推得 $\underset{a\text{除以}b\text{的商}}{c} = \underset{d\text{除以}n\text{的商}}{e}$。

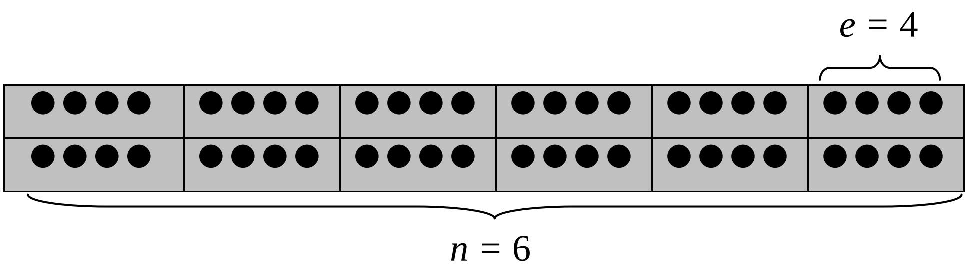
例子：計算 $\overset{a}{48} \div \overset{b}{12}$ 時（把 12 寫成 2 × 6），第一步計算 $\overset{m}{48} \div \overset{d}{2} = 24$，再計算 $24 \div \underset{n}{6} = \underset{e}{4}$，最後便得出 48 ÷ 12 = 4（第二步所計算出的商 e）。

以上的證明，還可用圖來向學生解說：

先把 48 等分成 2 份。48 ÷ 2 = 24，每份有 24。



再把每份的 24 等分成 6 份。24 ÷ 6 = 4，每一份有 4。



經這兩步除法計算後，已把 48 等分成 12 份，故此，48 ÷ 12 = 4。

在不整除的情況下，我們便得小心處理餘數。以下將要確定我們所得的餘數是否能滿足除法算法中，作爲餘數的條件：

若 a 和 b 爲正整數，那麼存在唯一的非負整數 c 和 d 使

$a = bc + d$， ………(4)

其中 $0 \le d < b$。 ………(5)

設 $b = mn$。因爲 $m > 0$，那麼存在唯一的非負整數 e 和 f，使

$a = me + f$， ………(6)

其中 $0 \le f < m$。 ………(7)

再把 e 除以 n，便得到唯一的非負整數 g 和 h，使

$e = ng + h$， ………(8)

其中 $0 \le h < n$，即 $h \le n - 1$。 ………(9)

從(6)和(8)，得 $a = m(ng + h) + f$，即

$a = bg + hm + f$。 ………(10)

要知道(10)式中的 g 和 $hm + f$ 是否我們所求的商和餘數，只需檢查

$0 \le hm + f < b$ ………(11)

是否真確。

首先 h、m 和 f 都是非負數，故 $hm + f \ge 0$。

從(9)得 $hm \le nm - m$，即 $hm + m \le b$，由(7)知 $f < m$，所以 $hm + f < b$。

由此得出 $0 \le hm + f < b$，即 $hm + f$ 能滿足(11)的條件。

第二步除法中的餘數　第一步除法中的餘數

換言之，經兩步除法所得的 $hm + f$ 便是 a 除以 b 時的餘數，而 g 便是要求的商。

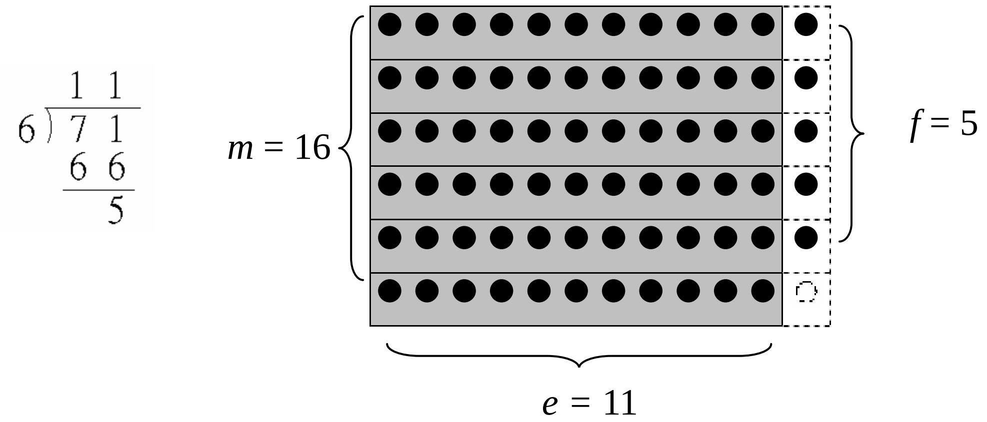
第一步除法中的商　第二步除法中的商

例子：計算 $\overset{a}{71} \div \overset{b}{24}$ 時（把 24 寫成 6 × 4），第一步計算 $71 \div 6 = \overset{m}{11} \ldots \overset{e}{}\overset{f}{5}$，

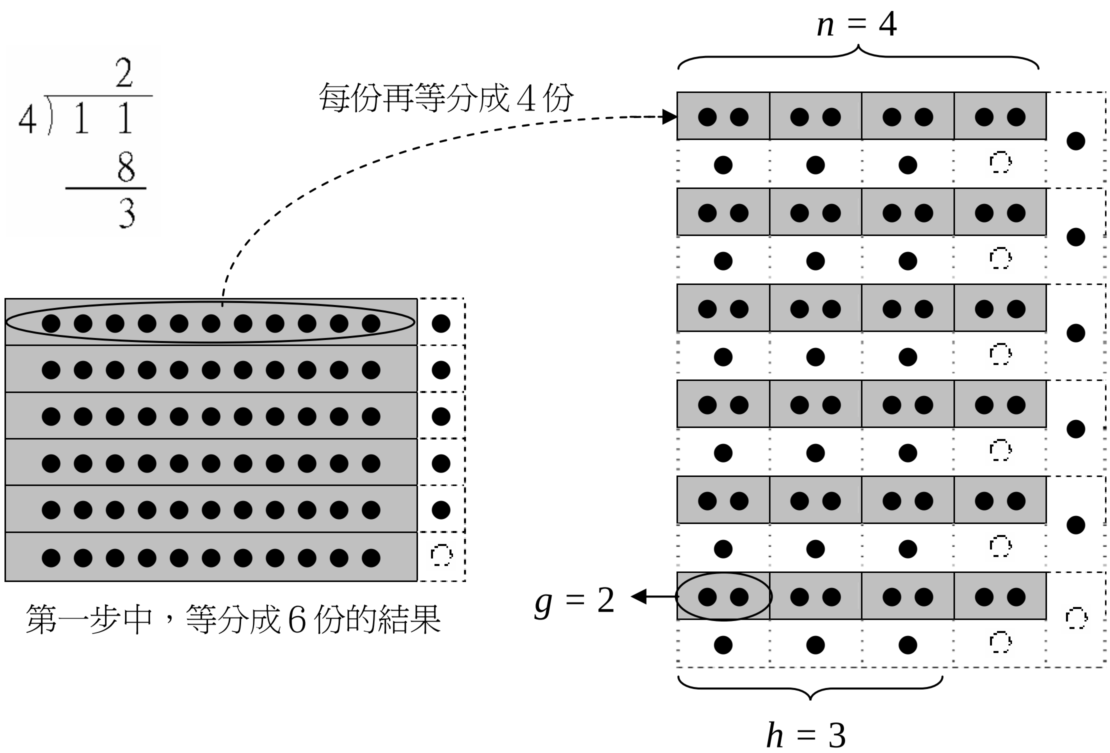
第二步計算 $11 \div \underset{n}{4} = \underset{g}{2} \ldots \underset{h}{3}$，這便得出 71 ÷ 24 的商是 $\underset{g}{2}$，餘數是 $\underset{hm+f}{23}$。

以上的證明同樣可用圖來向學生說明：

先把 71 等分成 6 份。71 ÷ 6 = 11 … 5，每份有 11，餘下 5。

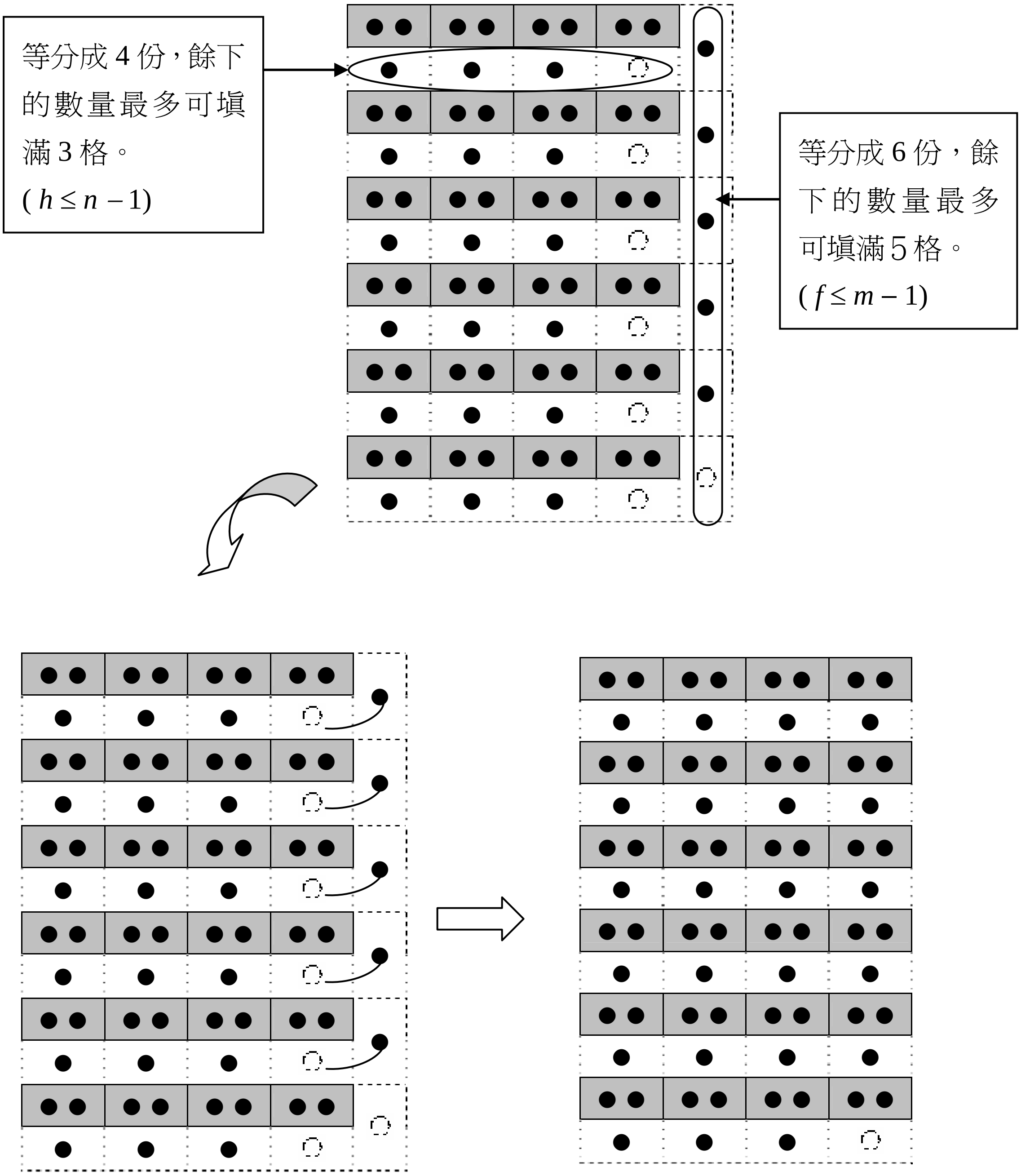


再把每份的 11 再等分成 4 份。11 ÷ 4 = 2 … 3，每份有 2，餘下 3。



第一步中，等分成 6 份的結果

從圖中探討第二步中的商（$g = 2$）和第二步中的餘數（$h = 3$）乘以第一步中的除數 ($m = 6$)，再加第一步中的餘數（$f = 5$）是否就分別是 a (71) 除以 b (24)時的商和餘數，我們可用以下的圖解：



餘下的數量最多可填滿 23 格。
（$hm + f < b$）

由上圖可以直接看到，71 等分成 $6 \times 4 = 24$ 份，每份有 2，餘下

$3 \times 6 + 5 = 23$， 即 $71 \div 24 = 2 \ldots 23$。

第一步所得的餘數

每份的 11 再等分成 4 份後的餘數

第一步所分成的份數

其實，這個「分步除法」可順利推廣至連續三步的除法（只要把除數因子分解三個數的積，然後經三步除法來計算）。讀者若有興趣，可自行想像如何利用三維空間的模型來解釋這個有趣的做法。

參考資料

馮振業、王倩婷、葉嘉慧、何妙珍（2000）。《數學化教學—除法》。香港：作者。