

## 數學花園大，請來看小花 ——介紹《平面幾何中的小花》

葉中豪

上海教育出版社

在數學的大花園裏，幾何是最美麗的部份。它既有優美的圖形，令人賞心悅目；又有眾多的問題，供大家思考探索。它的論證嚴謹而優雅，命題美麗而精緻。入門不難，魅力無限，因此吸引了大批業餘的數學家與數學愛好者(包括叱吒風雲的拿破崙一世)，在這裏大顯身手。一些歷史上有名的大數學家，像牛頓、費馬、帕斯卡、歐拉、高斯他們，也禁不住在這裏留連駐足，為花園增添奇葩。

偉大的物理學家愛因斯坦在《自述》中曾這樣回憶道：

「在我 12 歲時，我經歷了另一種性質完全不同的驚奇：這是在一個學年開始時，當我得到一本關於歐幾里得平面幾何的小書時所經歷的。這本書裏有許多斷言，比如：三角形的三個高交於一點，它們本身雖然並不是顯而易見的，但是可以很可靠地加以證明，以致任何懷疑似乎都不可能。這種明晰性和可靠性給我造成了一種難以形容的印象。……我記得在這本神聖的幾何學小書到我手中以前，有位叔叔曾經把畢達哥拉斯定理告訴了我。經過艱巨的努力以後，我根據三角形的相似性成功地『證明了』這條定理。……對於第一次經驗到它的人來說，在純粹思維中竟能達到如此可靠而又純粹的程度，就像希臘人在幾何學中第一次告訴我們的那樣，是足以令人驚訝的了。」（《愛因斯坦文集(第一卷)》）

面對幾何世界這筆豐厚的遺產，難怪 H. G. 弗德會說出這樣的話：「誰看不起歐氏幾何，誰就好比是從國外回來看不起自己的家鄉。」

幾何學的特點之一是其歷史的悠久。早在古希臘時代，幾何學就逐漸形成一門獨立的學科，無論在實際材料方面，還是在某些理論基礎的奠定方面，都得到了光輝的發展。古代希臘的許多數學家，如泰勒斯(約公元前 640-546 年)、畢達哥拉斯(約公元前 582-493 年)、希波克拉底(約公元前 430 年)、柏拉圖(約公元前 427-347 年)、歐幾里得(約公元前 330-275 年)諸人，對幾何學都有莫大的功績。泰勒斯發現了若干幾何定理和證明的方法，這是理論幾何的開端；畢達哥拉斯認為數學是一切學問的基礎，他對幾何學有很多研究，著名的勾股定理在西方就叫做「畢達哥拉斯定理」；希波克拉底編著了第一部初等幾何教科書，他首先會用「反證法」，與柏拉圖同為研究「幾何三大問題」的有名的人，因而附帶發現了許多幾何定理；柏拉圖首創現在視為證題利器的「分析法」，而確立縝密的定義和明晰的公理作為幾何學的基礎，這種思想也由柏拉圖開其先河；歐幾里得搜集當時所有已知的初等幾何材料(包括他自己的發現)，按照嚴密的邏輯系統，編成《幾何原本》十三卷，這部書在歷史上極負盛名，後世譽為幾何學的傑作。平面歐幾里得幾何學，如果從歐幾里得算起，也已經有兩千多年的歷史。

幾何學的特點之二是其內容的豐富。美國數學家 E.T.貝爾說過：「幾何學的浩瀚的文獻比算術和代數的加在一起還要多，其廣泛的程度至少和分析的文獻相當，這是比數學的其他部門更有意思的、而不是半遺忘的東西組成的豐富寶庫，但是匆忙的一代人無暇去欣賞它。」整個歐氏幾何確實像是一座豐厚的寶藏，經過兩千多年的採掘，大部份菁華已經落入人類的手中。到了 19 世紀後半葉，又湧現出了一大批瑰寶，發現了數以百計的新定

理，形成了所謂的近代歐氏幾何學，像 Torricelli-Fermat 點、Nagal 點、Gergonne 點、Brocard 點和圓、Lemoine 點和圓、九點圓、Euler 線、Steiner 點之類的獨特對象都得到了深入的探索和研究。正如 M. 克萊因在《古今數學思想》中所指出的：「這些成果，或許重要性不大，然而顯示出這門古老學科的新的主題和幾乎無窮無盡的豐富多采。」

然而，數學也與服裝一樣，講究時尚。「20 世紀的幾何學家早就虔誠地把這些珍品送進了幾何博物館，歷史的塵埃很快地把這些珍品的光澤湮沒」（《數學的發展》，第 323 頁）。隨著時間的推移，幾何在本世紀的發展遭受挫折，曾一度步入低谷。布爾巴基學派的代表人物之一狄多涅，在《我們應該講授新數學嗎？》一文中提出過「歐幾里得滾蛋」的說法，試圖推倒歐氏幾何在數學課程中的基礎地位，其影響波及面廣，以致在一些西方國家課程改革中歐氏幾何體系不復存在，而被其他的一些結構觀念所取代。但他的主張當即就遭到許多人的非議，引起了激烈的爭論。法國數學家托姆(突變理論的創始人、拓撲學家、菲爾茲獎獲得者)認為「幾何思維可說是人類理性活動的正常發展中不能省略的階段」，並建議恢復歐氏幾何體系的教學。經過近半個世紀來的實踐和反思，人們對此有了重新認識。1995 年《美國數學月刊》刊出了「三角形幾何學的興起、衰落和可能的東山再起：微型歷史」一文，全面分析了「一個被歷史的塵埃和灰燼所掩埋的科目能夠東山再起嗎？」這一繞有趣味的議題，並得出了正面的回答。作者最後堅信地指出：三角形幾何過去是為歐幾里得精神作證明的實踐的基地，如今已變成了決定性、證明和發現定理策略的實驗基地。由計算機帶來的三角形幾何的變革，以及其他領域中的這種變革，已經重新證實和加強了人類在「做數學」美妙活動中的根本作用。

但直至 20 世紀末，還有一些自命不凡的人打著這樣那樣的旗號，揀起

20 世紀 60 年代以失敗而告終的所謂「新數學運動」的唾餘，試圖將平面幾何內容「請出」義務教育，以為本著「大眾數學」的思路，就可以不讓公民掌握數學中的公理化思想。幾何的嚴謹性和明晰性遭到了強暴性的進棄，一些不倫不類的實驗手段和含糊不清的說理模式被唐而瓚之地「請入」殿堂，取代了數學中的論證和推理。與此同時，一些重要的幾何概念和優美的定理被大量刪削，真可謂是「黃鍾毀棄，瓦釜雷鳴」。甚至連「直徑所對的圓周角是直角」這樣的最基本的幾何遺產也不能幸免，被某些新編教材剔除在外。弄得學生對古希臘人就已掌握的數學常識都不具備，不知道嚴密論證究竟為何物，連解決一些簡單習題的基本功都沒能學到。這真是對現行教育制度的一種莫大諷刺。殊不知棄親忘本、輕視幾何、拾人牙慧以為時髦等這一系列陳舊的做法和觀念已大大落後於形勢的發展。

在 20 世紀末高新技術發展的推動下，幾何學原理得到了空前的應用。無論是在 CT 掃描、核磁共振等醫療成像技術上，還是在機械人、光盤、傳真、無線電話、高清晰度電視等最新電子產品上，都廣泛採用了傳統的和現代的幾何學理論。在人類進入電子信息社會的今天，幾何學對於人類社會發展的貢獻越來越大。

1998 年美國科學年會上，學者們一致認為 21 世紀的教育應把幾何學放在頭等重要的地位。硅谷的馬克斯韋爾等人甚至喊出「幾何學萬歲」的口號。與會科學家和教育學家大都認為，21 世紀教育的一個重要原則是，學校傳授給下一代的將不只是知識，更重要的是技能。幾何學具有較強的直觀效果，有助於提高學生認識事物的能力，應當成為自然科學教育大綱中的首選和重點內容。新澤西州普林斯頓大學數學系的約翰·康威說，幾何學早先是大學的課程，現在幾何學的許多內容放到中學來教授，其實，最簡單的幾何學內容完全可以放到小學甚至學前班來教授。他認為應當讓孩

子們從小接觸、了解、認識、熟悉幾何這種形象數學，進而從小養成認識事物和形象思維的習慣。華盛頓大學數學系的詹姆斯·金說，他們在華盛頓州帕克市一些中學進行的幾何學教學實驗表明，幾何學教學引進電腦後效果更佳，因為用電腦演示複雜的圖形變化過程可以帶給學生「看得見的動態立體形象」，而傳統方法則要求學生進行抽象思維。由美國 N.Jackiw 等人編制的《幾何畫板》正是順應這種需要而設計出的一種軟件，它具有獨到的設計思想和強大功能，已成為探索幾何學奧秘的強有力的輔助工具。《幾何畫板》的精彩之處在於它是一個動態的幾何學環境，利用其動態幾何功能，可以隨意改變一個圖形的形狀，並仍保持原來的幾何關係。隨著圖形的拖動，已構建的幾何關係變得極為直觀，能更容易地揭示出蘊藏在特殊圖形背後的一般規律，發現幾何關係將變得多麼令人興奮！《幾何畫板》還提供了豐富而方便的創造功能，通過編寫畫板和腳本，可以方便地驗證一些新的幾何猜測，隨心所欲地編寫出自己需要的範例，使幾何的優雅得到最為完美的表現。毫不誇張地說，這是目前所能見到的最出色的教學軟件之一，或許可以稱為偉大的教學軟件。它的出現，無疑會推動幾何的復興，重新喚起人們對幾何學知識的探索熱情。

在這樣的形勢下，數學家單墀先生經過艱辛的素材搜集，創作出了《平面幾何中的小花》一書，即將在 2001 年度得以出版。它通過很多豐富的示例，把讀者帶入到令人眼花撩亂的幾何世界中，任你隨意漫遊。全書共有一百餘個小標題，擷取了平面幾何中若干朵小花，供大家欣賞，其中既有我們近期遇到的問題，也有著名的經典結果。各節之間沒有特別緊密的聯繫，而且每節都不太長，中學生讀來並不困難。

它連同還在撰述中的《平面幾何中的小草》一起，將幾何學輝煌的昨日顯示給人看；它告訴我們，數學是一門博大精深的學問，學習它的最好

方法是自己去發現它；如果淺嘗輒止，就不能深刻體會數學中的樂趣所在；唯有對美的執著追求，才會把自己帶入到「奇偉、瑰怪、非常」的新境界。

它還啓示我們，爲什麼有必要不時地重溫昔日的成就，爲什麼必須對舊有的知識成果不斷加以再現和整理。這是因爲數學的目的，就是用簡單而基本的詞匯去盡可能多地解釋世界，如果我們積累起來的經驗要一代一代傳下去的話，我們就必須不斷地努力地把它們加以簡化和統一。拋棄傳統，就會斷絕未來。繼往開來，才能發揚光大。

願幾何世界中的這些瑤草瓊花迎風綻放，來點綴美麗紛芳的數學百花園。

最後，讓我們且以本書作者單墉先生的一首小詩來作爲全文的結尾：

「數學花園大，幾何算一家。春日興致好，請來看小花。學海無涯樂作舟，逍遙自在任我遊。已覺此處景物好，更有好景在前頭。」