從「生活化」到「數學化」數學教育的設想

香港中文大學
「小學生在中、英、數三科學習動機與模式」
發展與研究計劃數學組[1]

近年提出數學教學生活化的呼聲不絕於耳，「目標爲本課程」便已提出「課業」及「現實情景」的教學。但將生活情景加進(甚至有人用「稀釋」這個字眼)數學是否爲學習加入了人爲障礙，有論者已陸續提出 (黃家鳴，1997，1998，2001；Wong, 1997)。中文大學課程與教學學系於1999年2月19日便曾舉辦一個「數學教育之生活化與數學化」研討會，研究其中的矛盾與整合。

其實這個「生活化 — 數學化」、甚至「數學內容及技巧訓練 — 學習過程」的(表面)矛盾由來已久。Howson與Wilson(1986)便對「過程爲基課程」(process-based curriculum) 提出質疑。有名的Cockcroft(1982)報告書亦提出數學教育不應只提出一些如問題解決等非數學獨有之目的。事實上，這個問題早在60年代新數學的討論中已進行過激辯。最近其中一位組員(黃毅英)與公開大學黃家樂先生檢視了60年代新數學在香港的推行情況。發現這個數學本質和數學教育本質問題至今仍未得到正視(黃毅英、黃家樂，待刊)。

[1] 計劃之首席研究員爲香港中文大學課程與教學學系系主任黃顯華教授，研究助理爲朱嘉穎女士，數學組組員包括香港中文大學課程與教學學系黃毅英教授、台灣嘉義師範大學應用數學系梁淑坤教授及香港中文大學學校與夥伴協作中心劉應泉先生、世界龍岡黃耀南小學的林靜儀老師、梁芝蘭老師、葉雅文老師以及香港中文大學校友會聯會張宣昌學校冼秀容老師和李慧苑老師。

不少人均承認數學是具有嚴密邏輯性的知識體系。在加洲數學戰爭和近來內地數學課程的討論，似乎都給出一個印象，就是數學家頗爲強調數學之嚴謹性與抽象性。然而不少前線老師及數學教育工作者(包括教育心理學家和數學教育學家)都看到普及教育所面對的是所有學童。一方面，並不是所有接受數學教育的學生將來的職業均與數學有關(更遑論要成爲數學家了)；另一方面，普及教育所帶來的其中一個核心問題是學習動機，我們必須透過種種發生在學生身邊和日常生活中的事物去誘發學生的學習興趣(黃毅英，1995)。於是乎不少教育工作者就提出種種方法，如實驗、遊戲、探討日常生活的應用題等，既要提高興趣，亦藉此培養學生之問題解決等能力。然而，一些數學工作者又會指出這些只是形同「兒戲」，並非「正規」的數學。梁鑑添(1995: 頁224)更指出「今天主流數學課程有一點是未能做到的，那時沒有介紹數學的實質」。

舉一個大家熟識的例子：用圓錐體容器倒水三次入同底同高的圓柱體容器，這個事實是否「證明」了圓柱體體積爲圓錐體體積的三倍呢? 我們若把它作爲一個話題的引子，或藉此引起學習動機，恐怕未嘗不可(例如：何以這麼巧等於三倍呢? 讓我們細心加以察看…)，否則就是用鬆散的論述僞裝了嚴格的證明。

如何從實物和身邊事物慢慢抽象化而理出相關的數學對象(mathematical object)，又如何再用數學的方法得出結論？這些問題才是我們應該深入探討的，由興趣動機到正規數學的「數學化」(mathematisation)之路還是要小心摸索的(Freudenthal, 1991；黃家鳴，2001)。雖然不是人人都要做數學家或投身與數學有關的行列，然而一些如「解難(問題解決)、創新、分析、自學等能力之建立，並且包括排序、類比、規律尋找、掌握關鍵、御繁於簡等數學思維方式」(黃毅英，1995: 頁71)，縱使不是在日常生

活中得到直接的應用，卻對每個未來社會的公民都會產生作用，恐怕這才是「大眾數學」的本意。

蕭文強(1978)在《為甚麼要學習數學》便提出數學既是源於生產實踐，但亦是由具體到抽象、由歸納到演繹的過程。這是他從數學發展史中得到的啓示，而個體的數學學習又與人類歷史發展歷程相類似(Siu & Siu,，1979)，這恐怕就是給數學教學的一點啓示(見黃毅英、黃家樂，待刊；黃毅英，2001)。

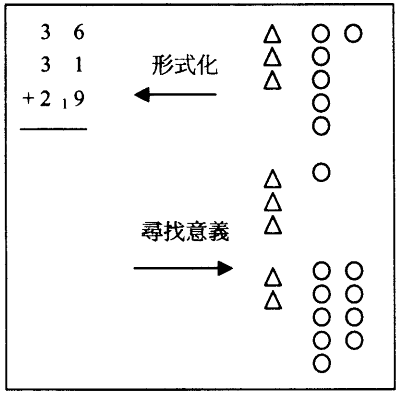
透過遊戲學習數學便是由「鬆散」的經驗獲得到實質的數學之一例。Bell(1978)便曾提出不要讓「遊戲」蓋過「數學」，田尼氏(Dienes，1981)更清楚地把數學遊戲分成自由玩耍、有規律遊戲、尋找共同結構、描述或圖示、符號化及形式化等六個階段(詳見黃毅英，1993)。這樣便能讓學生從遊戲中找到一些規律、一些解決問題的策略(詳見黃毅英，1990)。

一個數學課的實例

在數學教學上，Heddens和Speer(1992)曾提出具體(實物)(concrete)、半具體(semi-concrete)、半抽象(semi-abstract)及抽象(abstract)學習環境的鋪排(頁78-79)。我們未必意識到，對於一些年紀較小的學生(如小一)，由粗略的意念(例如大小、高矮、多少)到具體的操作，以至正規地解除答案(「貓的身軀比老鼠大」、「媽媽比小明高」、「哥哥的錢比小青多」) 中間均有一段距離。所以我們不難見到，學生在買賣遊戲中做得不錯，但是在家課裡卻答得一塌糊塗。我們不妨在這方面協助他們一把，例如在玩過遊戲之後，與他們一起寫出「我買了( )和( ) 、共需( )」的表達方式。

在一課連加的課裡，我們組員便曾利用教具把事物操作逐步化為形式化的操作。

以36+31=29為例，老師先用磁粒在白板上講解。然而，她不是只局限於實物數數，而是利用磁粒模仿算式的運算(如把十個代表個位的磁粒合起來，說這就可換上一個代表十位的磁粒 -- 甚至有初步「合十」的觀念)，這便是逐步形式化的肇始。老師還進一步將講解「穿疏」於實物(放在白板上之籌碼)和算式之間，讓利用籌碼之運算程序(包括進位)逐漸得到「形式化」(formalise)而成算式。其中之程序又反過來用實物去解說(make sense)，如是應可在學生腦海中形成表象(representation)，甚至乎是多重表象(multiple representation)。



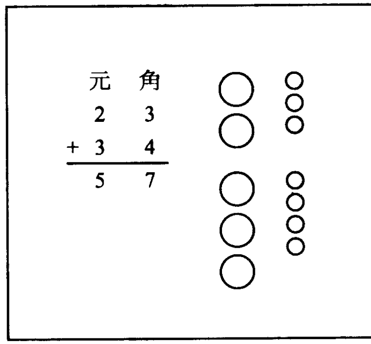
利用實物教學是常見的手法，但在運用期間又照顧到從實物到形式化的「過渡」理應有利於學生內部概念的建構。

在另一個關於貨幣加法的課堂裡，當然該課主旨本來只是利用實物數數、算出兩個金額(不涉及進位)的總和。一切只規限於實物操作，其實不必要認識正規加法(而其實兩者有差距，因為貨幣中有五角，二角等錢幣)，但當時有學生很快便看出答案其實是將元角兩項分別相加。老師自然而低調地將學生的答案以元與角分別並排，形成類似「直式」的格式，這亦是一種數學化(mathematisation)的過程。當然這個數學化的過程可以很長(甚至可以說整個學校數學都是數學化的過程)，但甚麼時候進入較形式化(甚或抽象

可以說整個學校數學都是數學化的過程)，但甚麼時候進入較形式化(甚或抽象化) 的階段完全是老師的專業判斷了。

表象的呈現與內部表象的建立

如何協助學生建構其數學概念呢?簡單而言，Hiebert和Carpenter(1992)指出，概念與概念之間形成一些內部的網絡，理解(understanding)及日後資訊的提取(retrieval of information — 一般人所說的「記得起」以前教過的東西)之高下在乎這些網絡的強弱與嚴密性。所以教育心理學家鼓勵一個觀念應以多重表象去呈現(multiple representation)：加法用數粒、數珠、手指、圖畫、直式、橫式等顯示，目的是加大加法與其他概念間網絡的強度。



建構主義(constructivism)進一步說明，我們根本不可能(起碼不可能完全地)把既有的(所謂「數學家」的)概念結構「移植」給學生，且無此必要。學生與學生之間(其實數學家與數學家之間也如是)的內部網絡可以不一樣，最重要的是說學生自行建構其本身的知性網絡及有這種建構能力(「學會學習」的真意) 。

當然，透過一些老師闡示不同的外在表象及操作策略是有助於學生內部概念的建構。例如加法便有數實物、數手指、順數、湊十、甚或一些速算法(8+9=2x8+1) 等。不過，我們可以將速算法一類先分開來(因為它們肩負的教學任務不同)。孩子們對一些運算的常見策略在文獻中是有所分析的，如Siegler和Shrager(1984)(加減法)，Lemaine和Siegler(1995)(乘法)等等。其

他可見Fuson (1988)； Geary (1994)；Lemaire和Siegler(1995)； McGilly和Siegler(1989) ； Siegler(1988) ； Siegler 和 McGilly (1989 及 Siegle 和 Shrager(1984)。以加法而言，利用實物操作、數手指、順數、湊十等一系列的活動，不只有助概念與技巧的形成，亦是一個由實物邁向抽象(也即是「數學化」的一個相面) 的過程(其實不要太驚訝、也不能說小學生無抽象思維)。數手指已是某程度的抽象，若學生漸漸不用數手指但在腦海中有手指的意象則更是進一步的抽象。只要學生能慢慢懂得用代名詞、代號、符號去思維，其他的外顯表象與教學手法只是手段(至於內部表象，上面已解釋，既因人而異亦無法刻意形成: 例如強迫戒掉數手指便有其弊端(見馬仔，1996)。

快而準?

當然，有些老師會指出，學生雖然掌握加法的不同層次的概念，它們加法不見得「好了」。首先，所謂「好」一般是指快速和準確(Lampert, 1990)。準確答案的獲得其實維繫著很多複雜之因素(如小心、專注、解題動機等)。不過Kerkman和Siegel(1997)便指出，一般學生是擁有兩類解題策略的：一是快速策略(fastest strategy)，一是備用策略(backup strategy) 。當前者(例如快速的看到兩個數能作「合十」) 不管用時，學生就會轉到備用策略。簡言之，當快速策略用不著時，就要靠先前形成的正確概念去找尋從最基本的想法做起。就以分母加法爲例，一般人在「通分母」時也不會從分數的定義去算起，一切已變得自動化，這便是操作的層面(procedural knowledge)。但當他碰到較複雜的數題(如$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{5}$, 甚或 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$)時，他若對其中概念沒有真正的認識(conceptual understanding)，一切就會混淆起來了。

參考書目

梁鑑添博士榮休前接受莫雅慈的訪問：「梁鑑添博士漫談香港數學教育」。載蕭文強(1995)(編)《香港數學教育的回顧與前瞻》，223-229。香港：香港大學出版社。

馬仔(1996)。好心? 壞事? 《數學教育》2期，27-38。

黃家鳴(1997)。生活情境中的數學與學校的數學學習。《基礎教育學報》7卷12期，161-167。

黃家鳴(1998)。數學文字題及課業的處境應該有多真實？《數學教育》7期，44-54。

黃家鳴(2001)。現實情境作爲數學學習的起點：荷蘭經驗。《數學教育》11期，34-46。

黃毅英(1990)。「解題與數學教育」。《數學傳播》54期，71-81。後載黃毅英(編)(1997)。《邁向大眾數學的數學教育》(頁59-82)。台北：九章出版社。

黃毅英(1993)。「遊戲與數學教學」。《數學傳播》66期，253-293。後載黃毅英(編)(1997)。《邁向大眾數學的數學教育》(頁59-82)。台北：九章出版社。

黃毅英(1995a)。普及教育期與後普及教育期的香港數學教育。載蕭文強(編)《香港數學教育的回顧與前瞻》，69-87。香港：香港大學出版社。

黃毅英(2001)。學科作爲一種綜合能力的教育。《信報・教育眼》。

黃毅英、黃家樂(待刊)。近半世紀漫漫「數教路」—「新數學」運動的過程及對當代數學教育之啓示。

蕭文強(1978)。《爲甚麼要學習數學》。香港：學生時代出版社。第二版(1992)香港新一代文化協會。增訂本(1995)，台灣：九章出版社。

Cockcroft, W.H. (1982). *Mathematics counts.* London: H.M.S.O.

Dienes, Z.P. (1981). *Building Up Mathematics.* Hutchinson Educational Ltd.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fuson, K.C. (1988). Children's counting and concepts of number. New York: Springer-Verlag.

Geary, D.C. (1994). Children's mathematical development: Research and practical applications. Washington, DC.: American Psychological Association.

Heddens, J.W., & Speers, W.R. (1992). *Today's Mathematics* (7th Edition). New York: Macmillan Publishing Co.

Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp.65-97). New York: Macmillan.

Howson, G., & Wilson, B. (Eds.). (1986). *School mathematics in the 1990s.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kerkman, D.D., & Siegel, R.S. (1997). Measuring individual differences in children's addition strategy choices. *Learning and Individual Differences, 9*(1), 1-18.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*, 29-62

Lemaire, P., & Siegler, R.S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to learning of multiplication. Journal of Experimental Psychology: General, 124, 83-97.

McGilly, K., & Siegler, R.S. (1989). How children choose among serial recall strategies. Child Development, 60, 172-182.

Siegler, R.S. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students, and perfectionists. Child Development, 59, 833-852.

Siegler, R.S., & McGilly, K. (1989). Strategy choices in children's time-telling. In I. Levin & D. Zakay (Eds.), Psychological time: A life-span perspective.

The Netherlands: Elsevier Science Publishers.

Siegler, R.S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), Origins of Cognitive Skills (pp.229-293). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum.

Siu, F.K., & Siu, M.K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International Journal of Mathematics Education for Science and Technology, 10(4)*, 561-567.

Wong, K.M.P. (1997). Do real-world situations necessarily constitute "authentic " mathematical tasks in the mathematics classroom ? *Curriculum Form, 6*(2), 1-15.