分期付款

梁子傑
香港道教聯合會青松中學

向銀行借款 P 元，分 n 期歸還，利率每期為 r，如果每期還款的數額都一樣，問每期應還多少？

本人發現，不少的數學（課外）書都會採用以下的方法來解此題：

將本金 P 分成 n 分，$P = P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n$，其中 P_i 表示在第 i 筆還款中，本金所佔的數額。那麼第 i 期還款的款額應等於 $P_i(1 + r)^i$。由於我們是以「定額還款」的方式來計算，所以可設 $P_i(1 + r)^i = x$，其中 x 為一定值。因此，$P_i = \dfrac{x}{(1+r)^i}$。

$$\text{由此得}\quad P = \frac{x}{(1+r)} + \frac{x}{(1+r)^2} + \ldots\ldots + \frac{x}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{\dfrac{x}{1+r}\left(1 - \dfrac{1}{(1+r)^n}\right)}{1 - \dfrac{1}{1+r}}$$

$$= \frac{x}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

$$\therefore\ x = \frac{Pr}{1-(1+r)^{-n}}\text{，這就是每次的還款額。}$$

譬如：向銀行借 100 萬元，（即 $P = 1000000$）分二十年還款，（即 $n = 240$，）年利率為 9%，（即 $r = 0.0075$，）則每月還款額便約等於 8997 元。

雖然以上的計算方法相當簡單，而且與一般銀行計算出來的結果吻合，但祇要仔細地留意一下，就會發現有分別。由於 $P_i(1 + r)^i = x$，而 x 為一定值，所以當 i 越大時，P_i 就會相對應地減少。即是說，在第一期還款中，本金佔了一個很大的成分，而到了最後一期，利息則佔了大多數。明顯，這和現時銀行所採用的還款方式有出入。

如果以「分期付款」的方式向銀行還錢，最初的供款，利息其實是佔多數，而隨著還款的次數增加，尙未歸還的本金減少，利息才會減少。到了最後幾期的還款，本金才佔多數。情形正好和上述的相反！那麼，實際上銀行是採用甚麼方法來計算呢？

如果設 Q_i 爲在第 i 次還款前尙欠銀行本金的數額，那麼到期還款時，連本帶利就欠銀行 $Q_i(1+r)$。由於每期還款額都等於 x，所以到第 $i+1$ 次還款前，尙欠銀行本金的數額 Q_{i+1} 就等於 $Q_i(1+r)-x$。留意，依照定義，$Q_1=P$ 而 $Q_{n+1}=0$。

$$
\begin{aligned}
\because \quad Q_{i+1} &= Q_i(1+r)-x \text{，其中 } i=1,2,\ldots\ldots,n\text{。}\\
\therefore \quad Q_n &= \frac{x}{1+r}\\
Q_{n-1} &= \frac{x}{(1+r)^2}+\frac{x}{1+r}\\
\cdots &= \cdots\cdots\\
P=Q_1 &= \frac{x}{(1+r)^n}+\cdots\cdots+\frac{x}{(1+r)^2}+\frac{x}{1+r}\text{。}
\end{aligned}
$$

這個結果，又正好和上面的結果吻合。不過，利息的數額就不同了。從第一個方法得 $P_i=\dfrac{x}{(1+r)^i}$，所以第 i 期利息 $=x-P_i=x[1-(1+r)^{-i}]$。至於後者，由於

$$
\begin{aligned}
Q_i &= \frac{x}{(1+r)}+\frac{x}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{x}{(1+r)^{n-i+1}}\\
&= \frac{\dfrac{x}{1+r}\left(1-\dfrac{1}{(1+r)^{n-i+1}}\right)}{1-\dfrac{1}{1+r}}=\frac{x}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^{n-i+1}}\right)
\end{aligned}
$$

所以，第 i 期利息 $=Q_i\times r=x[1-(1+r)^{-(n-i+1)}]$，正好和上面的結果相反。

相比之下，個人覺得後者的計算方法的確較複雜。至少，它需要設立一個「歸約公式」和兩個初始值來進行運算。那麼，銀行爲何仍然採用第二個方法呢？

在利率不變的情況下，我們採用哪一種方式計算都沒有問題，但如果利率在還款過程中有所改變時，前一個方法就出現問題了。由於我們一早將本金分成 n 分，當利率改變時，每一分 P_i 所乘上的百分數就將會不同，最後便會得出不同的結果，因而引至每期的還款額都不一樣。這時，就違反了當初以「定額還款」的想法。

至於後一個方法，因爲每一次利息都是在前一次還款後再重新計算的，所以當利率浮動時，我們祇需要將未歸還的款額重新代入公式 $x = \dfrac{Pr}{1-(1+r)^{-n}}$ 中，就可以得到另一個還款額。我們亦可以改變 n（即還款期數）來令還款額固定於之前的數額之上。由此來看，後者的計算方法，就比較合理和方便了。

由此例可知，有時我們爲了較容易地獲得一到解答，往往會採用一些簡單而直接的計算方法，但這些方法在實際上，卻未必能完全行得通。一些看似較複雜的方法，反而有它們實際的應用價值合理性。因此，我們在閱讀書本時，亦應時常反問自己，倒底書中的內容，是否真的和現實相符。

參考書目

《漫談現代數學》 作者：莫由　　出版社：廣西人民出版社

鳴謝　作者全靠兩位現時從事銀行業務的中學同學的協助，才能完成本文，故特此向雷國強先生和黎樂之先生致謝！