

實地考察一次扭曲的數學學習： 乘除混合計算的教學

馮振業
香港教育學院數學系

以計算為主導，妄顧數學原理闡釋的教材對學生學習的潛在打擊已被論述 (Fung 及 Mok, 1997)。最近，筆者有機會觀看一位年輕教師教授小三乘除混合計算，可算是目睹憂慮變成事實。

該教師極用心備課，而且教學技巧出色。從她的教具準備，以至內容的佈置，可以肯定她絕非馬虎一族。授課當日，學生秩序良好。教師先引用動畫人物大雄的粗心性格，帶出錯把 $24 \times 5 \div 4$ 寫成 $24 \div 4 \times 5$ 的討論。經過充分的驗算，學生都能接受一般而言， $a \times b \div c$ 等於 $a \div c \times b$ 。

至此，教學在非常輕快暢順的情況下進行，學生也學得明白。

接著，教師帶領學生從計算速度的角度去想上面兩種不同的計算次序，正好掉入被 Fung 及 Mok 評為極之危險的教學軌道。事實上，學生對「把 $a \times b \div c$ 變成 $a \div c \times b$ ，會在 a 能被 c 整除時省了計算時間」樂於接受。因此，在教師提問最好如何計算 $35 \times 2 \div 7$ 時，學生異口同聲說應化作 $35 \div 7 \times 2$ 。在一輪風平浪靜的師生對答之後，教師輕鬆地問了以下問題：

「應怎樣計算 $12 \div 8 \times 4$ 呢？」

活潑的課堂氣氛頓時消失，各人面色一沉。教師隨即抽問學生，要他們作出建議。經一番折騰，結果，不同的學生給出以下一些建議：

$$\begin{aligned} &12 \div 4 \times 8 \\ &12 \times 4 \div 8 \\ &8 \times 4 \div 12 \\ &12 \div (8 \times 4) \end{aligned}$$

最後，教師以只有 $12 \times 4 \div 8$ 可以計算為理由，令學生接受應以此法計算。可以看到，有些學生依然感到不明所以，只好糊里糊塗地接受當 $a \div c$ 無法計算時（當時學生還未認識分數）， $a \div c \times b$ 只好以 $a \times b \div c$ 計算。

其實，教師的設計，基本上與所用的課本一致。依課本的設計，學生先分開計算一些形如 $a \times b \div c$ 的算式，再計算以同樣數字組成的 $a \div c \times b$ 的算式，再把兩組算式的答案配對。經這個觀察，得知在 c 整除 a 的時候， $a \times b \div c = a \div c \times b$ 。有了這個結論，課本提出「調換次序，方便計算」的建議。如是者，形如 $a \times b \div c$ 的算式，均化成 $a \div c \times b$ 的式子計算。值得注意的是，課本從未涉及 c 不整除 a 的情況（余，1997）！因此，理論上學生對 $a \times b \div c$ 和 $a \div c \times b$ 兩種算式形態的實質意義皆完全掌握，自然亦完全明白為何兩者可以互換。再者，課本亦未提及有把 $a \div c \times b$ 換成 $a \times b \div c$ 計算的必要。換言之，課本並無誤導的內容，相信問題發生在教師身上。

明顯地，課本的謹慎佈局並未令教師意識到危機四伏。或許教師出於「好心」，刻意加插由 $a \div c \times b$ 換成 $a \times b \div c$ 的「需要」，務使佈局看來更加對稱！以上的觀察可有下列的補充討論：

1. 在 c 不整除 a 時， $a \times b \div c = a \div c \times b$ 是有理數域 (Rational Number Field) 中，乘法結合和交換的結果。在這情況下，我們把 $a \times b \div c$ 看成 $(a \times b) \times \frac{1}{c}$ ，再透過乘法結合和交換性質得出上述關係式。事實上，在小五的分數乘除教學裏，是有必要使學生明白及能運用 $a \times \frac{b}{c} = a \times b \div c = a \div c \times b$ 這個事實。
2. 目前，大多數課本均迴避區分帶餘和不帶餘除法，算式如 $12 \div 8 = 1 \dots 4$ 和 $12 \div 8 = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$ 的分別和關係便得不到充分的闡釋。籠統地說，前者是整數作為歐氏整環 (Euclidean Domain) 的事情（即整數除法），而後者則是有理數域的事（即有理數除法）。雖然抽象代數的名稱嚇人，但是如果從實物操作的角度解釋給小學生聽，卻非常簡單。教師大可舉例說要均分 12 個橙給 8 位小朋友，則前算式表示我們不願切開任何一個橙，故此只能每位分得 1 個，餘下 4 個；而後算式則表示「盡分」的結果，每位得 $1 \frac{1}{2}$ 個橙，即把前面餘下的 4 個切成 8 等份，讓每位再取 $\frac{1}{2}$ 個。明白了這個分別，就可知道對（學得好的）小五學生來說，算式題「 $12 \div 8 =$ 」是含糊而無法作答的，因為當中除號的確實意義（即考慮整數除法還是有理數除法）並未說明。這亦解釋了課本中， $32 \div 8 \times 4 = 32 \times 4 \div 8$ 的 $32 \div 8$ 無論用何種方法理解均只可能是 4，相反地教師用的

$$12 \div 8 \times 4 = 12 \times 4 \div 8$$

- 中的 $12 \div 8$ 卻可能有兩種意義。習慣上，在這樣的乘除混合計算的式子中，我們是不考慮帶餘除法的，相信很少教師注意到這一點。
3. 課本的內容，似乎是在不知不覺地鼓吹一種為計算快捷而考慮掉換運算次序的想法。撇開這種佈局為學科知識不穩的教師設下陷阱不談，單從現代計算速度越見不重要的數學教育主流思想看，這丁點兒的好處實在不值得一談，充其量也只是一些小技巧，比之乘法交換性質這大智慧，可算微不足道。
 4. 教師錯誤地由無法計算推導掉換運算次序是極之危險的想法，他日學生若然以 $12 \div 8$ 無法計算而把 $12 \div 8 - 4$ 算成 $(12 - 4) \div 8$ 時，恐怕教師也只有氣結的份兒。從課堂學生的回應可見，學生真的已感染到「數學是可以胡亂來做」的氣氛，他們可能相信只要運氣好，必可猜到教師的心事，反正對與不對由教師頒佈，泰半是想不出來的！
 5. 時有聽聞依書直說的教師給人看扁，這次經歷卻又令我擔心進取勤奮的教師刻意求功，亦可能好心做了壞事。說到底，筆者一直對小學數學人人可教存疑(馮，1995)。近年的工作(馮及駱，1998；馮，1999a, 1999b)更清楚顯示如果不從根本扭轉建基於這種信念的教師教育及選任政策，恐怕香港數學教育只有繼續滑坡的份兒。

參考資料

- 余榮燊 (1997)。《目標為本課程現代數學》，3 下 A 冊。香港：現代教育研究。
- 馮振業 (1995)。舉步維艱的小學數學教育。載蕭文強編《香港數學教育的回顧與前瞻：梁鑑添博士榮休文集》，98-99 頁，香港：香港大學出版社。
- 馮振業 (1999a)。《數學化教學：難點選編》。香港：作者。
- 馮振業 (1999b)。數學化教學：由夢想到現實。載黃毅英、黃家鳴編《基礎數學教育的優化研討會論文集》，4-46 頁，香港：香港中文大學教育學院課程與教學學系。
- 馮振業、駱瑞萍 (1998)。分數何其難：記一次犯難的掙扎。香港數學教育會議—98，一九九八年六月二十五日，香港中文大學。
- Fung, C.I., & Mok, A.C. (1997). Primary school arithmetic in Hong Kong: Shall we discard the procedural paradigm? *Educational Journal*, 25(2), 63-80.