

研討會策劃人蕭文強先生建議以四維共濟作為主題，探討香港的數學教育。他提出的縱向四維是小學、中學、大學、師範教育；橫向四維是學生、教師、數學家、教育家。我猜測他的意思是，以這兩組四維所編織成的經緯作為基礎範疇，討論香港數學教育事業。要討論的項目可以包括考試、課程、教學法、教材、教具、家長合作、學校結構、文化背景、社會現象等等。雖然上列幾個項目都是教育成敗的重要因素，而且互有關連，值得我們深入探討。無可否認首兩項：考試和課程，是最具有全面性，它們廣闊地，直接地，深遠地控制著和規範著整個教育事業的發展。考試和課程工作處理得宜，學生和教師都得益不淺。假若不幸處理失當，不合理的考試和欠善的課程是最具有殺傷力，足以導至整個教育事業的崩潰。在一小時的講座中，對整個數學教育作出深入的，全面的，有效的檢討，恐怕是一件非常吃力而且是辦不到的事情，我建議不妨把注意力集中在考試和課程兩個項目之上。

考試和課程都是錯綜複雜的多面活動。一個考試少不免要涉及試卷；試卷的數目、型式、長短和內容；試題的數目、範圍、深淺程度；評分的標準；總成績的計算方法；等別的劃分方法等等。一個教學課程就更為複雜了。為避免流於空泛，我再建議把討論的焦點先分別放在單一個考試內容綱要和兩個教學課程綱要之上，然後旁及其他。先談考試，再談課程。首先有必要弄清楚考試綱要的本質，它的制定過程，和它的影響。

愚見以為本質上一個考試綱要是主考機關和考生之間的一份合約。對主考當局是具有約束性的，它不容許試題超出預定的範圍，更不容許多出或少出一張試卷。不過由於範圍的界線并不太清楚，而且這些模糊界線的說明權盡在主考人手上，所以實在對主考機關并無作出多大的掣肘。對教師而言合約亦不約束教師選擇教學範圍和內容。對考生而言亦無明文規定，只准他們學習範圍之內的課題，不准他們學習以外的課題。所以一個考試綱要理論上祇是一份給教師和學生作為教學或應試的參考文件。但是實際上，由於老師們都有不考者不教，學生又有不考者不讀的習慣，所以一張看來祇有寥寥幾百字的文件也就完全左右了教學方向，決定了課程內容。所以有必要先看看這份關鍵性文件。

*本文為一九九五年六月十日假香港大學黃麗松講堂舉辦“香港數學教育的回顧與前瞻”研討會專題演講講詞。得作者概允轉載，深表謝忱。

這份合約是由大約二十位教師、數學家、教育家組成的 Subject Committee 設計或修改後單方面制定的。這個小組以外的全部學生，絕大部分教師和數學家在整個制定過程當中都沒有參與權利，或祇有間接的參與權利，或極小的主動參與權利。如果把橫向四維學生、教師、數學家、教育家排列為自左至右 x -軸上的四點，將 y -軸表示他們在制定綱要過程中的參與主動程度，我們在 xy -平面上畫出一條從左下往右上的上升曲線。同樣地用 z -軸表示綱要對他們產生的利益或損害程度，我們在 xz -平面上畫出一條從左上往右下的滑落曲線。從這兩條曲線我們看到的是一個令人驚恐的現象。主動權被掌握在人數極小而利害關係極微的人的手上，反之利害關係最重大，人數最眾多的學生則處於完全被動的地位。而相對應于兩曲線交點的教師則處於一個既主動也被動的尷尬地位，亦即是說少數教師主動，多數教師被動，但對全部教師而言則利害均等。作為從業于數學專業工作者的絕大多數，教師怎樣審查和評價考試綱要，怎樣作出最有效的反應，這是值得我們關注的大問題。

在全香港數百間學校差不多每日都有各種的數學考試和測驗。但影響最大的莫如考試局主辦的幾個公開數學考試。按照今日的講座題目：數教漫談；如是我、我聞、我思，我覺得我個人祇有資格，淺談曾經參與其事的高級程度純數學科考試。請容許我首先就高級程度純數學科考試綱要內容近四十年的演變作一個頗為主觀的回顧。

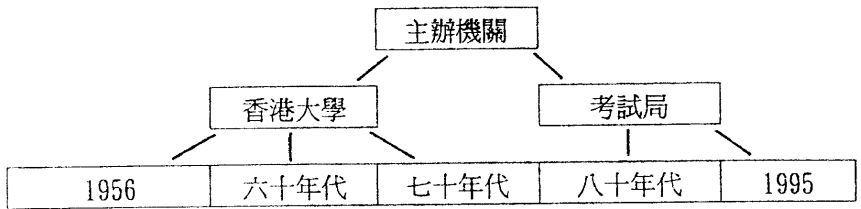
雖然我在香港出生長大，但是首次直接地接觸到這個考試綱要還是在1960年，回港後的第一個聖誕假期。數學系系主任黃用誦教授交給我一個任務，要我在假期之後交出兩份試卷：一份是普通程度數學科試卷，一份是高級程度純數學科試卷。這個任務令我非常驚奇，因為我從沒有在英國學制的中學和大學讀過書或教過書，亦從沒有考過相類似的考試，實在沒有擔當這重任的資格。感謝黃教授的信任和支持，就硬著頭皮出了兩份試卷。從那時開始直至八十年代淡出具體工作止我和高級程度純數學科考試結下了為期二十多年的不解之緣。

言歸正傳。借用矩陣語言，試將五個十年為列，以十二個考試課題為行，排列成圖表粗略地展示出高級純數學科考試綱要的演變。

第一列七行是1956年香港大學入學試高級程度純數學科考試綱要的主要課題，這是手上最早的一個綱要，也是1960年出試卷時所依據的綱要。這份早年綱要非常簡練，因為已經全部包括普通程度數學科考試課題，再沒重新一一列出的必要。各課題的範圍可以從當年的試題重新鉤畫出來。看來第一至第四個課題四十年來沒有顯著的更改。第五個“古典”幾何是傳統的平面幾何（祇出現在普通程度綱要），亦即是歐幾里得《幾何原本》極度簡化後的一個課程。所謂“現代”幾何其實並不現代，而是一些不在《幾何原本》出現的平面幾何定理，例如出現在綱要上的公元一世紀的

Menelaus 定理，十七世紀的 Ceva 定理和十八、十九世紀的反演幾何 (Inversion Geometry)。祇因為當年流行課本都叫 Modern Geometry 而得名。最後第七個課題包括空間的點、線、面、球面、圓錐、柱體、多面體。整體地看這不失是一個合理而且平衡的綱要，足以給予教師和學生一個廣闊的教學空間。教師有足夠的自由，設計出生動而豐富的課程，更無找不到適當課本的苦惱，因為多的是可用的教課書和參考書；學生亦可以按照自己的能力和興趣更深入地學習個別課題。

圖表的第二列是八年後1964考試綱要的主要課題。第六行的“現代”幾何消失了，據回憶取消這個課題時並沒有遇到阻力。雖然這部份的平面幾何的確有很多有趣而且難度很高的定理，樂此不疲的學生亦大有人在，不過這不能算為是不可缺少的課題。作一個比喻，它有點像熱帶水果榴槤，愛好的人覺得香甜得很，不愛好的人就要繞路遠避。無論如何它不是人體營養不可缺少的食品，不吃榴槤也不至因此營養不良。同樣地取消了“現代”幾何也不做成學生數學營養失調。反之、第五行和第七行的幾何確實是數學營養的主要食物，它們得以合理地保留在綱要裡是一件好事。增加第八行：基本概念，亦即是邏輯和集合論，主要是兩個原因。其一是回應了大學數學課程的革新，其二是受到當時方興未艾的新數影響。新數運動和它的盛衰不是今日討論題目，不必多談了。姑勿論其原因，我以為邏輯和集合論出現在中六、中七課程還是可以接受的。它既在縮短大學數學課程與高中數學課程之間的距離有所幫助，更可以給予整個高中數學課程一種合適的數學語言；它替代了頗為麻煩的“現代”幾何，並沒有增加教師和學生的負擔，其實還補充了多一些數學維他命。



	1956	六十年代	七十年代	八十年代	1995
1. 微積分	✓	✓	✓	✓	✓
2. 代數	✓	✓	✓	✓	✓
3. 解析幾何	✓	✓	✓	✓	✓
4. 三角	✓	>>	>>	>>	>>
5. “古典”幾何	✓	X	X	X	X
6. “現代”幾何	X	X	X	X	X
7. 立體幾何	✓	X	X	X	X
8. 基本概念		✓	✓	✓	X
9. 複數			✓	✓	✓
10. 矩陣			✓	✓	✓
11. 代數結構			X	X	X
12. 線性代數 (\mathbb{R}^2 和 \mathbb{R}^3)					✓

AL-Exam OL-Exam	AL-Exam OL-Exam 至 1965止	AL-Exam	AL-Exam	AL-Exam ASL-Exam

六十年代後期港大入學試易名為港大高級程度考試。但是改變并不止于名稱而已，其實整個考試運作亦經歷了很大的改革。假如將六十年代初期的考試運作比喻為家庭手工業，則六十年代後期的考試運作已經是小工廠工業，而七十年代考試局成立之後的運作就是現代大型工業。六十年代初期，通常是一個人負擔起一張試卷自始至終的全盤運作，這包括了單人匹馬作出全部試題，評閱全部數百本答卷，和全權決定各考生的積分。當年也沒有 Subject Committee 等組織；考試綱要是由數學系的四五個人議定，送給學校徵集意見，作出最後修改便制定下來。當年我們覺得還能夠直接地感覺到學生的數學脈搏，迅速地作出適當的反應。當然這種手工業運作再不適用於今日的社會。不過對一個經歷過考試工業革命三個階段的過來人，當年的考試運作的工作效率，是頗堪回味的。

到六十年代後期，普通程度考試亦從此不再舉行了。因此祇出現出在普通程度綱要的平面幾何亦從此不在高級程度綱要出現了。又因為不考的課題都不教，中六、中七學生從此再不接觸到古典幾何。他們享用的“數學全餐”好像缺少了點主要的營養品。與此同時幾何科在中學會考和中學教學課程也遭遇到大幅度的減削，數學營養不平衡情況更覺嚴重了。

到1970年，綱要增加了三個課題，其中複數和矩陣兩項用不著再加註釋。所謂代數結構不外是簡單的群、環、域、和線性空間的實例。因為程度太不合適中六中七學生而且課題在課程和考試也缺乏發展潛力，所以三幾年後便被剔除，給範圍較狹窄的線性代數所替代了。這項措施還有商榷餘地，稍後再談。

八十年代裡基本概念的邏輯和集合逐漸淡化，繼而幾乎全部消失，到九十年代再無顯著的修改。

我們知道綱要祇是高級程度純數學科考試的一小部份。全面回顧四十年的考試，我們還要仔細地審閱八十份試卷裡面的幾百條試題，考生就各試題作出的典型答案，各年及格的分數等等。這是窮一人之力所不能辦到的。(蕭文強先生去年曾經審閱過最近十年的二十份試卷百多條試題和各年的主試官就各條試題作出的報告，得到很寶貴的資料。)不過我們希望可以通過這一個簡單的十二行五列的圖表發現一些現象，提出一些值得我們注意的問題。讓我們看看這些現象和問題。

一目了然的是十二個課題之中，為首四個被列入為受保護課題；第五、第六、第七是被取消課題；餘下五個是增補課題，不過其中的第八和第十一英年早逝，算是夭折項目。

我們都很熟悉的保護課題暫且不談。很明顯的是，全部綜合幾何被取消了；亦即是說一筆勾消了最有利於學生學習邏輯推理的教材；訓練學

生的數學書寫和表達能力的好機會給放棄了。假若我們理解到幾何不單只是邏輯運作，而是數學整體不可分割的一部分，那麼我們會非常惋惜。教師因此失去了寶貴的材料潛移默化學生，使他們得到那種祇能意會難以說明的所謂數學修養和數學意識，建立起較為完整的數學觀。這是難以彌補的大損失，增補了的四個代數課題就補救不了，因為規限在考試範圍之內它們祇能提供數學計算而不是數學推理的材料。雖然那天折了的基本概念還可以在一定意義上有所裨益，但是較之於多姿多彩，內容豐富的綜合幾何，邏輯和集合論就顯得枯燥和淡而無味了。但可惜連這小小的也沒有給保留下來。

以上是從考試綱要演變作出的推測。那麼在歷年的高級程度純數學科考試我們看見什麼呢？先看試卷，再看考生的答案。應該肯定的是，各年由大學教師和中學教師聯手精心製作的試卷都是上乘佳作，每年都有不少有趣和有啓發性的試題。從內容來看試題或稍嫌過於側重數學運算而疏忽了概念理解；從試題的型式來看，試題亦多以運算為主導作為前段，把通常都要涉及推理運作或形像理解的最精彩大結局放在後段。這是一種很合理的安排，盡量地照顧了考生。可惜大部份考生沒有領會這份好意，沒有理解到試題各部分的通貫性，把它們看成積分累積的小題目。從各年的 Chief Examiner's Reports 看到的是，祇有少數考生嘗試解答後段問題，其中極少人能作出稍有條理的答案。看來從考試得來的印象沒有推翻以上從綱要作出的推測。其實這幾年來我們都感覺到大學一年級新生的數學能力下降，學生的數學修養貧乏和數學意識薄弱等使人不安的現象。當然這不能全歸咎於一種高級度考試，或減少了綜合幾何的考試綱要。應該還有其他的原因；包括學位增加，語文水準下降，學生的學習意願，急功近利的社會風氣等等。

請勿誤會，我不是急於建議把綜合幾何的幾個課題重新放回高級程度純數學科考試綱要。這是不合實際，一定受到反對的。我建議的是把中四、中五的附加數學科課程全部刷新，改變成爲一個爲期兩年的，獨立的幾何課程，使部分數學才能較高的中學生能夠有系統地，連貫地學習平面幾何，立體幾何，或甚至適量地學一點“現代”幾何裡面的有向線段和反演幾何，從以加強他們的數學修養和數學意識，建立起比較完整的數學觀。我覺得這是一個甚有教育意義的建議，也是一個考試技術上可行的改革。如所週知，現行的附加數學科課程主要是高級程度純數學科課程的預備課程，因此做成普通數學、附加數學、高級純數學三個課程在銜接上很不調和，增加了很多教學上的困難。去年還增加了一個高級補充程度 AS-Level 課程，四個課程之間的不協調情況就非常嚴重了。把附加數改爲獨立幾何課程，四個課程的銜接再不成問題了。我希望在座各位在適當時候和適當場合討論這個建議。

有關考試綱要餘下的幾個增補課題，想提出兩點意見。其一，增加了複數以後，為什麼又忽略了實數呢？實數不纔是整個高中數學課程的基礎嗎？我建議 Subject Committee 在適當時機討論這個問題。其二我總覺得高中線性代數和矩陣祇作為大學課程的預習沒有多大教育意義，最適當的處理方法還是把這些課題歸併在解析幾何裡面，真正顧名思義地把多種代數方法和幾何結合起來，使它們相得益彰。

餘下的時間我們談談課程綱要。看看香港課程發展委員會1992發出的英文《Advanced Level Pure Mathematics Syllabus》和1985發出的中文《中一至中五適用，數學科課程綱要》。相信各位都很熟悉這兩本各一百多頁的小冊子。和祇有幾頁紙的考試綱要比較，它們的確是龐然巨物。再看清楚，我們發覺，課程綱要祇不過是考試綱要的注疏本。（如果考試綱要是《春秋》，那麼課程綱要也就是《春秋》加上《公羊傳》和《穀梁傳》再加上篇幅更大的《左傳》。）進一步再看看香港市面上近年出版的中一至中五適用的數學科課本，我們發覺這些課本其實亦不過是課程綱要的注疏本，也就是說它們都是幾頁紙的考試綱要的注疏本的再注疏本；難怪它們的內容、課題深度、引進個別課題的動機、個別課題的處理手法，練習問題的質量；甚至各大、中、小標題的次序都沒有多大的分別。說得難聽一點，這些大同小也不異的課本都一一同構 (isomorphic)！（中六至中七的純數學科課本，我沒有看過，它們是否如此呢？希望不是。）

這是一個非常可怕的，由小至大的演化現象：從幾頁紙的考試綱要，自滿自足地演化成百多頁的課程綱要，然後閉門造車，再演化成很多套，每套各千多二千頁的，亦步亦趨的 isomorphic 的課本，再進一步演化成在各中學，個別課室裡進行著的數學操練式課程。而由始至終，決定了整個課程發展的基因、染色體、脫氧核糖核酸其實都已經蘊藏在寥寥數百個字的考試綱要裡面。生物遺傳學家會認為這一種欠缺基因改良，多少有點似亂倫式的演化 (incestuous evolution)，會產生怪胎。從數學教育觀點看，這種缺乏新生力量，自滿自足，不自然的課程發展很可能會（但希望在香港還沒有）造成一個非常僵板的，毫無活力的，扼殺想像力的，強迫人誠惶誠恐，循規蹈矩的教學環境。要是真的話這將會是一個奇怪的教學環境，無以名之；讓我們借用經濟學詞匯，名之為“鳥籠教學”。在一個由考試綱要、課程綱要、課本織成的籠子裡面，大鸚鵡教一群小鸚鵡在牙牙學語。聞說已經發現“鳥籠經濟”出了些很嚴重的經濟問題。想像得到，“鳥籠教學”的數學教育效果也不會好吧？

以上危言聳聽的戲劇性描述，當然是言過其實的，不可盡信的。姑勿論如何，相信我們同意，上述的由小到大的課程發展過程是不健康的。理想的、合理的運作過程應該是反方向，由大到小：課程 → 課程綱要 → 考試綱要。工作起點當然是教學經驗和所有與數學教育有關的材料。這包括了教師，數學家和教育家的意見；古今中外數學教育文獻；數學科

課本；教師手冊等與數學教育有直接關係的資料。也包括了和數學教育有間接關係的社會現象和文化背景。

具體工作的第一步可以分組局部進行。各小組由志同道合的熱心數學教育從業人士組成。每個小組對選定了一個數學科，通過交流切磋，集思廣益，提出一個適應目前香港教學實情的課程模式。每個課程模式有必教課題、選教課題、學生自行進修課題。每個課題之下附加注解和教學建議。這部分不應該盡是那些人所皆知的定義和運算方案，或那些沒有新意的教案。須要補充的是，教學心得，課堂經驗，課題的數學意義和教育意義，有關的文化歷史背景。此外還要說明該課題與其他課題的數學關係，同時也可以指出處理該課題的最佳課本。無疑這是一個重頭工作項目。因為各個小組都自發組成，獨立工作，互不牽制。而且各組的人數不多，容易觸摸到學生的數學脈搏，照顧得到學生的利益。我想在座諸位之中，其實已經有人想過或甚至著手做過相類似的工作；我祇想在這裡建議，有組織地，有意識地，廣泛地再調動教師們的積極性。假以時日，可以見到水到渠成。所以這種通過分組局部工作的方法還是有成功的希望的。

具體工作的第二步是，集中審核那些課程模式，經過較別，更替、減削、增補，去其糟粕，存其精髓，製作出一個簡明的課程綱要。一個較理想的課程綱要不應該是一份最高指示式的硬性約束文件，它應具備適度的容忍性和伸縮性，給予教師一個廣闊自由的教學空間，發揮他們的專長。課程綱要的形式和上述的課程模式一樣，有各種類的課題，註釋和教學建議，給課本作者和在職教師作參考。

具體工作的最後第三步是，從課程綱要抽出適合考試的部分，提煉出一個考試綱要。當然這兩個工作步驟是由課程發展局和考試局的兩個 Subject Committees 聯合主持。

我希望沒有在作出了一個危言聳聽的描述之後，繼而作出一個幻想主義烏托邦建議。是否如此，請各位在下一節的論壇上發揮您們的高見。