小學簡易方程教學與反思

鄧佩玉

鳳溪廖潤琛紀念學校

探討重點

- 方程的理解
- 解一步計算的簡易方程的題型
- 解兩步計算的簡易方程的題型
- 算術思維與代數思維
- 用簡易方程解答應用題的教學
- 其他學習難點

方程的理解

一般的數學定義：
方程是有著一個未知數，
而且是以一道等式的形式表達這個未知數與其他數量的關係。

以下哪些不是方程？

(a) $3s + 12 = 12$

(b) $100 - (20b + 50)$

(c) $2 + \frac{x}{5} = 5\frac{2}{5}$

(d) $3 \times k$

(e) $33y = 11$

(f) $6.5 + 7y = 8.6$

(g) $33 - 6A$

(h) $4a > 20$

(i) $23.4 = 1 + 7x$

(j) $5 = P - 5$

(k) $22 = \frac{n}{3} + 15$

(l) $30 = 3P + 10.5$

$x = 26 - 3$ 是方程嗎？

請參閱第24期<<數學教育>>
黃家樂、李玉潔(2007)。<<式子「 $x = 11+5$ 」是一道方程嗎？>>

http://www.hkame.org.hk/uploaded_files/magazine/24/242.pdf

解一步計算的簡易方程的題型

教學程序：

(1)以生活情境引入

(2)重溫算式填充題

（ ）＋ 6 ＝ 18、 4 ＋（ ）＝ 27、
14 －（ ）＝ 11、（ ）－ 3 ＝ 11

(3)天平原理引入，輔以圖像作說明

陳嘉皇（2006）引述Kieran的見解認為，繪圖可以幫助發展代數的結構性概念。

解一步計算的簡易方程的題型(加法)

你會先教授以下那一道方程？

你認為是否有分別？

(a) $18 = x + 7$　　(b) $x + 2 = 6$

(c) $5 + x = 10$

解一步計算的簡易方程的題型

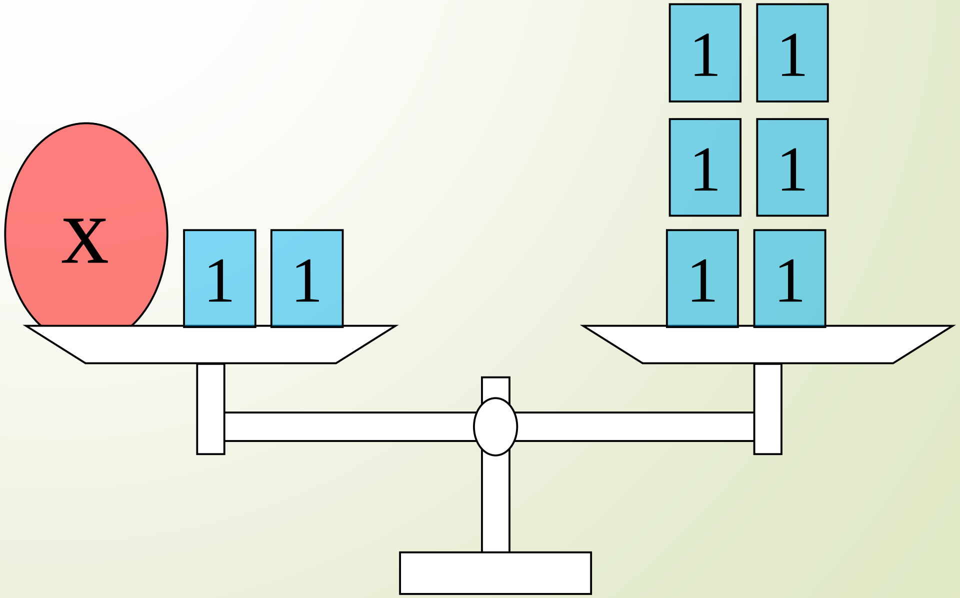
天平原理引入，輔以圖像作說明

(例1)

$$x + 2 = 6$$

$$x + 2 - 2 = 6 - 2$$

$$x = 4$$



解一步計算的簡易方程的題型

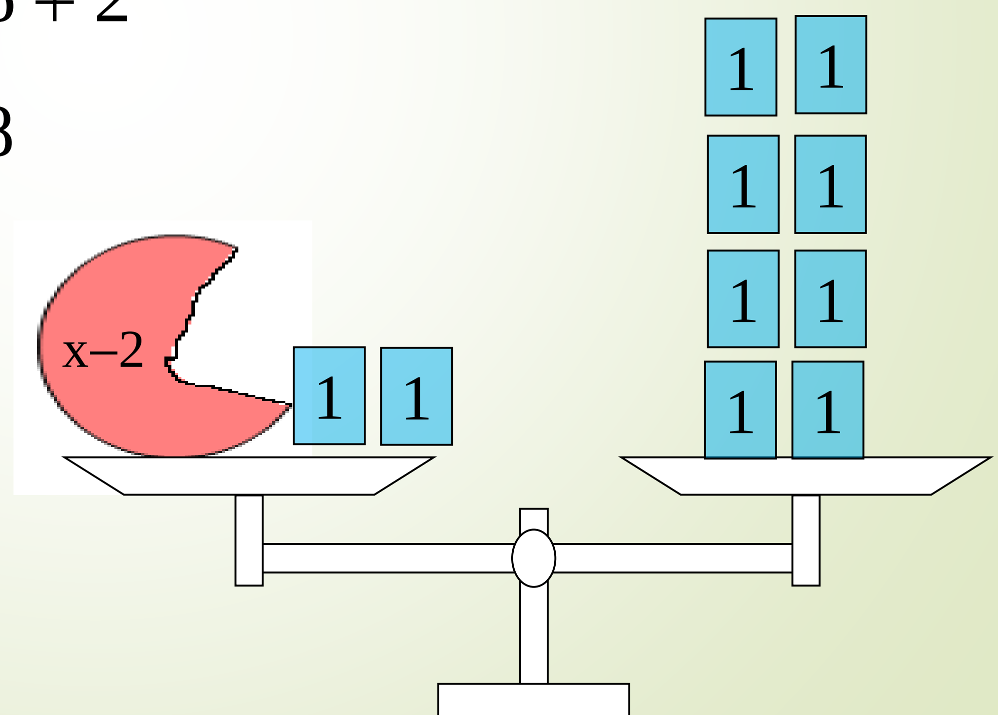
天平原理引入，輔以圖像作說明

(例2)

$$x - 2 = 6$$

$$x - 2 + 2 = 6 + 2$$

$$x = 8$$



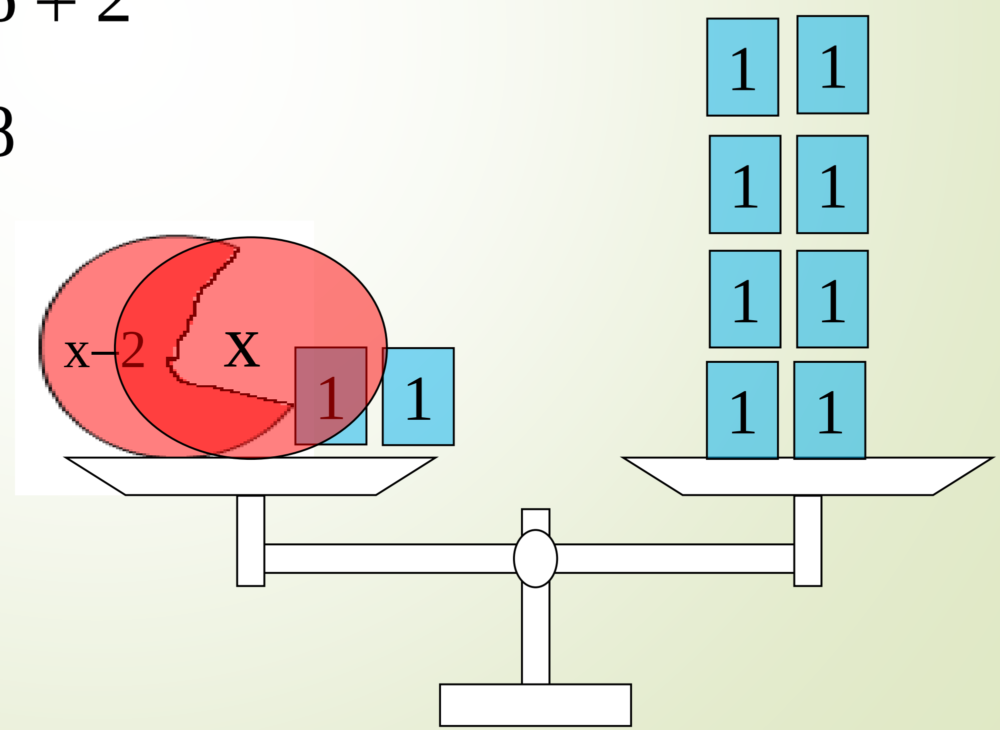
解一步計算的簡易方程的題型

天平原理引入，輔以圖像作說明

(例2) $$x - 2 = 6$$

$$x - 2 + 2 = 6 + 2$$

$$x = 8$$



解一步計算的簡易方程的題型

天平原理引入，輔以圖像作說明

(例3)　$2x = 6$

如何理解 $2x$？

學生必須理解 $2x$ 即是

$x \times 2$ (x 的 2 倍 或 2 個 x)

$2 \times x$ (2 的 x 倍 或 x 個 2)

$x + x$ (2 個 x)

解一步計算的簡易方程的題型

天平原理引入，輔以圖像作說明

(例3)　$2x = 6$

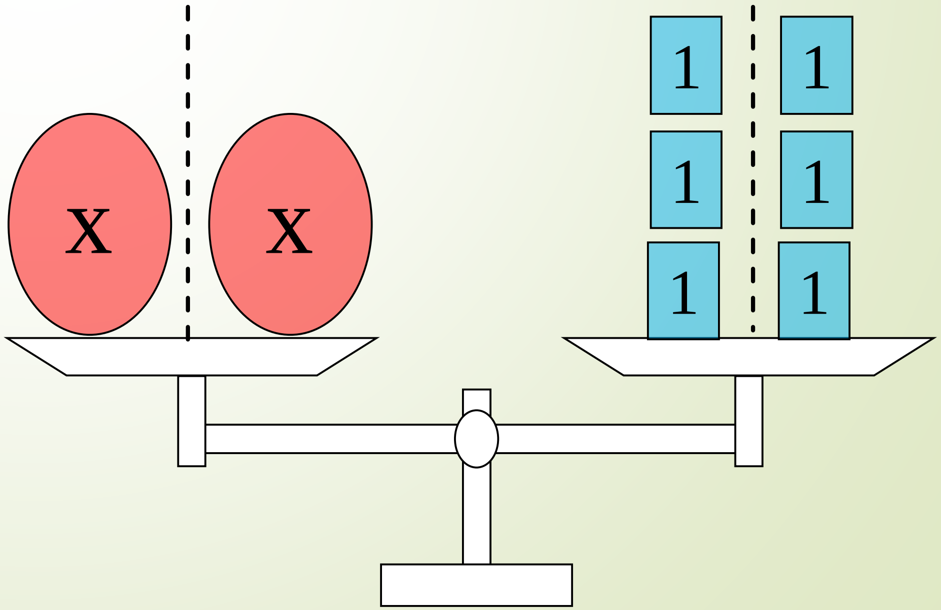
$$\frac{{}^{1}\cancel{2}x}{\cancel{2}_{1}} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}_{1}}$$

$$x = 3$$

(x 的 2 倍 或 2 個 x)

可以寫作 $2x \div 2 = 6 \div 2$ 嗎?

如何處理 $1x = 3$?



解一步計算的簡易方程的題型

天平原理引入，輔以圖像作說明

(例4) $\dfrac{x}{2} = 6$

如何理解 $\dfrac{x}{2}$ ？

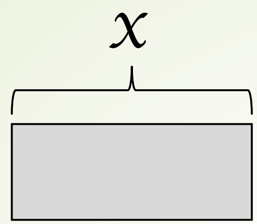
學生必須理解 $\dfrac{x}{2}$ 即是

$x \div 2$ （x 除以 2）

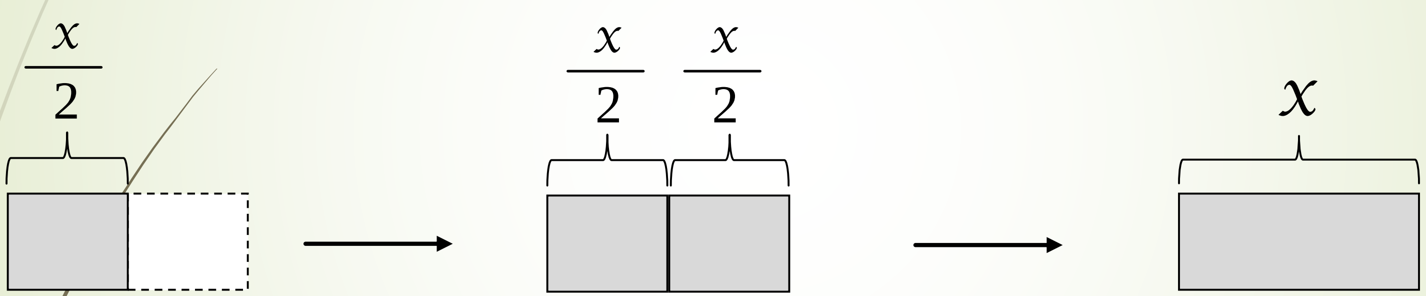
$x \times \dfrac{1}{2}$（x 的 $\dfrac{1}{2}$ 倍 或 $\dfrac{1}{2}$ 個 x）

$\dfrac{1}{2} \times x$（$\dfrac{1}{2}$ 的 x 倍 或 x 個 $\dfrac{1}{2}$）

用圖像理解$\dfrac{x}{2}$



這表示 1 個 x



1 個$\dfrac{x}{2}$ 2 個$\dfrac{x}{2}$ 1 個 x

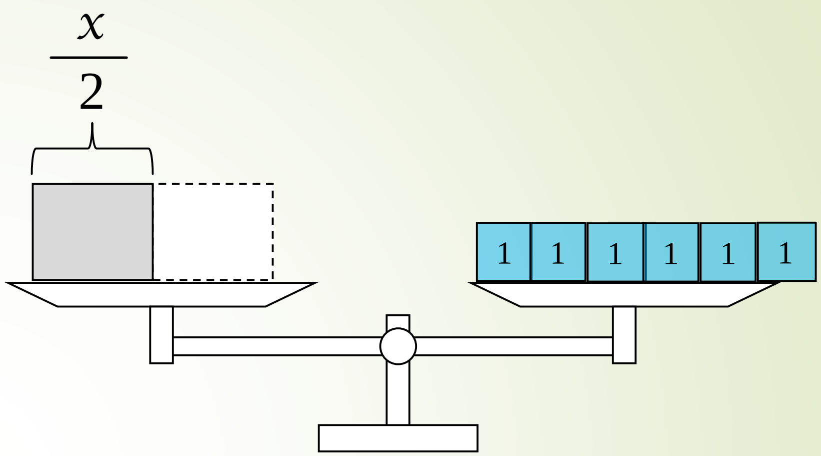
$$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2}\times 2$$

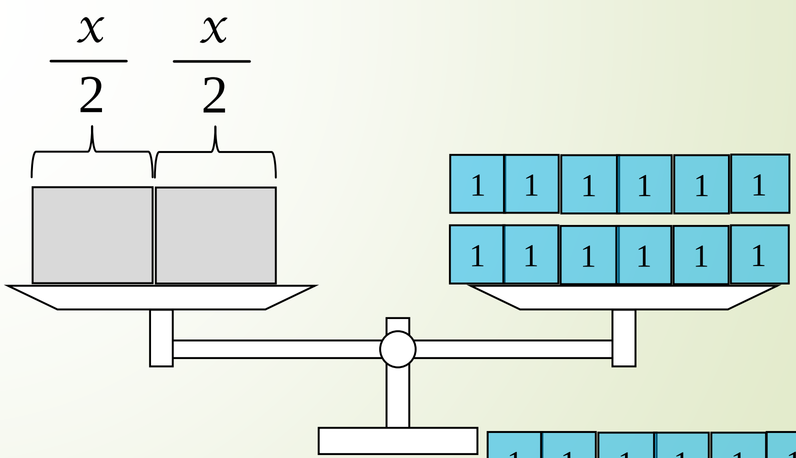
解一步計算的簡易方程的題型

天平原理引入，輔以圖像作說明

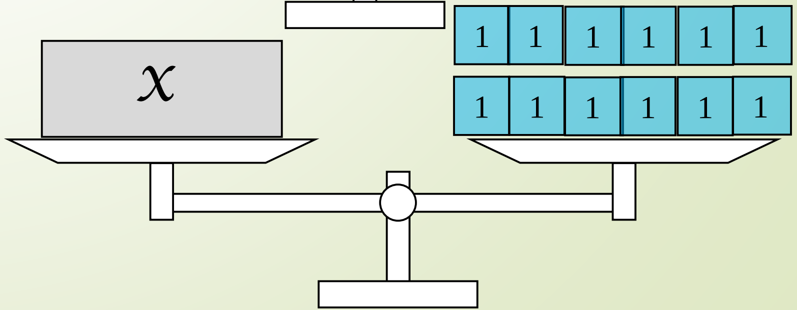
(例4) $\dfrac{x}{2} = 6$



$\dfrac{x}{2} \times 2 = 6 \times 2$



$x = 12$



解兩步計算的簡易方程的題型

$y \times 75\% - 2 = 7$

$a \times (1-40\%) = 12$

$3 + 20n = 600$

$7 = 5 + 4y$

$3x - 6 = 18$

30.5

看了這些例子，大家有甚麼感想？

$\frac{3(m-1)}{4} = 48$

$10 \times (M - 5) = 10$

$(H + 5) \times 2 = 10$

$5 \times (B + 4) = 30$

$6(B + 2) =$

會先處理那些例子？

$\frac{r}{4} - 5 = 0$

$\frac{t}{9} + 1 = 10$

$\frac{y}{2} + 0.5 = 3.5$

$4n + 2\frac{2}{5} = 4$

$\frac{2S}{3} \times 20 = 1$

$6k + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

$\frac{t}{5} - 2 = 18$

$\frac{t}{2} - 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

$6x + 4.7 = 18.5$

$12.7 = 3B - 2.3$

$\frac{B + 2}{6} = 1$

解兩步計算的簡易方程的題型

第一類

先乘或除，後加或減，如有括號要先處理

$$\frac{2S}{3} \times 20 = 1$$

$$\frac{B+2}{6} = 1$$

$$5 \times (B + 4) = 30$$

$$(H + 5) \times 2 = 10$$

$$6(B + 2) = 1$$

$$10 \times (M - 5) = 10$$

$$a \times (1 - 40\%) = 12$$

解兩步計算的簡易方程的題型

第二類

先加或減，後乘或除

$3 + 20n = 600$

$7 = 5 + 4y$

$3x - 6 = 18$

$\frac{r}{4} - 5 = 0$

$\frac{t}{9} + 1 = 10$

$\frac{t}{5} - 2 = 18$

$4n + 2\frac{2}{5} = 4$

$\frac{t}{2} - 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

$6k + \frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

$\frac{y}{2} + 0.5 = 3.5$

$30.5 = 8.3 + 2x$

$6x + 4.7 = 18.5$

$15.7 = 2P - 2.3$

$12.7 = 3B - 2.3$

$y \times 75\% - 2 = 7$

李源順(2015)亦指出這是算式和方程的運算差異。

特別的例題

$$\frac{3(m-1)}{4}=48$$

$$a-(20-2)=24$$

$$8m \div 4 = 4$$

$$30 - J = 16$$

$$19 = 27 - M$$

$$3 \times (14 - m) = 4$$

算術思維與代數思維

概念

謝佳叡(2003)認為「算術思維」著重利用數量的計算求出答案的過程，這個過程是蘊含情境的、具有特殊性和計算性的。至於「代數思維」則依重關係的符號化及其運算，這個運算是去情境的、具有一般性和形式化的。

算術思維與代數思維

運算式的功用

謝佳叡(2003)認為在「算術思維」中，運算式的功用是一種思考的紀錄，即是直接連結題目和答案的橋樑。 在「代數思維」中，運算式的功用不只是一種思考的紀錄， 也充當一個問題轉譯的角色。故此，從代數思維的角度來看，解具體情境題便會被區分成兩個部分：列式與求式子的解。

算術思維與代數思維

運算式的功用

被區分成列式與求式子的解兩部分的特徵與算術思維是不同的。當問題被轉譯成方程後，接下來所做的運算並不是針對原問題的答案，而是方程的解，而這個過程是一種跟原來問題及情境無關的符號運算，運用的是具有結構性與抽象性的運算法則，最後再對求出的解進行意義上的還原。

這種源於問題轉譯、對消還原的代數思維，擴展到符號化、一般化、抽象化及結構化的代數概念，不少學者均認為中間需通過算術思維，尤其是對數量關係的操作和觀察。故此，一般認為代數思維的養成在算術思維之後，並且必須奠基於算術思維之上。

算術思維與代數思維

從算術思維到代數思維的過渡

謝佳叡(2003)認為要從「算術思維」過渡至「代數思維」，在教材的安排上，必須要注重代數思維的符號化、一般化（抽象化）和結構化三個特徵。

特徵1：符號化

數學算式是數學溝通和思考最重要的媒介，符號表達的理解和使用是代數的學習不可或缺的工具，因此要過渡到代數思維，首要進行的必然是符號的理解和使用，代數符號包含 =、×、+、…、□、甲、x等。

算術思維與代數思維

從算術思維到代數思維的過渡

特徵2：一般化（抽象化）

符號的使用只是代數思維的第一步，真正進入代數思維的是符號背後的代數想法，也就是一般化的想法。如果只是借用代數的符號，實際運作的卻是算術的想法，則仍未能稱不上是運用了代數思維。

算術思維與代數思維

從算術思維到代數思維的過渡

特徵2：一般化（抽象化）

例如：「一個定價100元的杯子，現以八五折出售，便宜了多少？」

情況1

學生解題時，能夠假設便宜了x元，並列出方程：

$$x = 100 - 100 \times 0.85$$

$$x = 15$$

從以上的步驟得知，即使學生使用了代數符號，如果腦中實際進行的只是算術的想法，那麼代數符號在此並未發揮任何功用，他只是解了一個特定的題目，因此他仍應用算術思維去解方程。

老師如何去檢查？

算術思維與代數思維

從算術思維到代數思維的過渡

特徵2：一般化（抽象化）

情況2

學生的思考方式如下：
定價 x元的東西，現以八五折出售變成$0.85x$元，因此便宜了$(x-0.85x)$元，而且知道定價是多少，因此列出$100-100\times0.85=15$。當中，就算完全沒有出現過代數符號，我們仍可以說學生已經運用了代數思維。原因是學生不但解決了這一道題目，同時也解決了同一類型的問題，這種已經對題目一般化的想法，正是代數思維的核心。這種一般化的想法是不可缺的。

算術思維與代數思維

從算術思維到代數思維的過渡

特徵2：一般化（抽象化）

當學生知道某個定價x元的東西，以八五折出售，
即是便宜了$x-0.85x=0.15x$元，我們便可以說學生已經能夠把這個問題轉化為某種程度上一般化。另一方面，一般化也能表現在折扣上，亦即是
「便宜的價格＝定價−定價×折扣」，
而這個「$100-100\times0.85$」只是「$x-0.85x$，x代表定價」這個一般化的特例，同時也是「定價−定價×折扣」這個一般化的特例。

算術思維與代數思維

從算術思維到代數思維的過渡

特徵3：結構化

Sfard（1991）建議可以用程序性和結構性兩種不同的方式來形成抽象的數學概念。

Kieran (1992) 從歷史性的分析把代數的發展視作一種程序性到結構性的週期。學校代數的學習可以理解為一系列的過程—客體的調整（即程序性—結構性的調整），他同時指出所謂程序性指的是應用在「數」上的運算，而結構性泛指實施在「代數式」上的運算。

算術思維與代數思維

從算術思維到代數思維的過渡

特徵3：結構化

例如，當學生要求9的平方根時，可能利用代入數字的方法處理，計算1×1＝1、2 × 2＝4、3 × 3＝9等，並且由學習得知(–3) × (–3) ＝9，因而求得9的平方根是3和–3。雖然這個解法是一個固定的思維模式，但運算對象是數，當問題的數字改變後，求解的過程便會跟著改變，因此這個解法僅是一個程序性的解法，未達到結構化；相對地，當學生思考的是9的平方根就是$\pm\sqrt{9}$，在學生的思維中已經有a的平方根是的$\pm\sqrt{a}$ 結構，這時候運算的客體已經脫離了數，而是進入代數了。

算術思維與代數思維

算術思維與代數思維在學習上可能遇到的困難

困難1：相同符號，不同意義

數範疇與代數範疇共用了許多的符號和物件，例如：

(a) 1、2、3、…、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、… 、0.1、0.2、0.3、…

(b) +、−、×、÷、=

然而這些符號有部份在數範疇和代數範疇中，意義上是有分別的，故此學生面對這些符號時，經常產生混淆。

算術思維與代數思維

算術思維與代數思維在學習上可能遇到的困難

困難1：相同符號，不同意義

以等號「＝」為例，在數範疇中「＝」代表運算結果「得到」。而在代數範疇中「＝」代表一種等價關係，因此「＝」左右兩邊是同樣的大小。如果學生仍然以程序性的運算角度來看待等號，那麼就會令他們無法接受許多的等式。例如：「4+3＝6 +1」，許多學生會認為此等式右邊不代表一個運算的結果，若果把「4+3＝6 +1」再加上等號而寫成「4+3＝6 +1＝7」才算完整，此類學生即是尚未將等號視為一種等價關係。

算術思維與代數思維

算術思維與代數思維在學習上可能遇到的困難

困難2：運算客體的擴充

在數範疇，被運算的客體只有數字；在代數範疇，被運算的客體除了數字外，還包括代數式、方程等。舉例來說，2＋4＝6，學生會認為其中的2＋4是一種運算，得到的結果是6，而2和4是被運算的客體。久而久之，學生會認為客體都是數，不會包含運算符號。

在代數範疇，x＋y除了可被視作一種運算外，亦可以被視作被運算的客體，這是在數範疇沒有的。學生不容易理解為什麼x＋y沒有答案。此外，由於符號的引入，令代數能處理的概念形式遠在數範疇之上。例如：對於「2的倍數」這個概念，在代數範疇中，它是可以用「2n」來進行操作，而在數範疇中，它只能利用2、4、6...進行操作。

算術思維與代數思維

算術思維與代數思維在學習上可能遇到的困難

困難3：數範疇的解法沒有固定的形式，
而代數範疇的解法則強調嚴格的格式

在數範疇，解題方法可以是分部計算或列總式計算式，而代數範疇的解題法只有一種標準的格式。

用簡易方程解答應用題的教學

謝佳叡(2003)認為學生在面對生活中的數學問題時，一直被培養使用具程序性的逆向思維來解應用題。如果使用代數方法來解應用題，便要順著問題的情境來處理。這正是學生感到困難所在，因為他們需要用一種與原來思維逆向的思考方式才能列出方程。

傅學燕 (2011)亦認為列方程是一種不同於數範疇的解題策略和思維方式，要讓學生接受且能習慣地使用，確實需要一個過程。

用簡易方程解答應用題的教學

例：一個數的3倍加5是32，求該數。

數範疇的解題方法

計算方法		想法
分部計算 $32 - 5 = 27$ $27 \div 3 = 9$	列總式計算 $(32 - 5) \div 3 = 9$	某數加5後，得到32，所以減5，得到27，而27是某數3倍後的值，所以原來的數是27除以3，答案是9。 故此，所做的運算有「減5」和「除以3」，這些運算是由「3倍」和「加5」的逆向思維而來。

用簡易方程解答應用題的教學

例：一個數的3倍加5是32，求該數。

代數範疇的解題方法

計算方法	想法
設該數是x $3x + 5 = 32$ $3x + 5 - 5 = 32 - 5$ $\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$ $x = 9$	為了列出這一道方程，所做的運算是「乘以3」和「加5」，剛巧是與數範疇運算的想法相反。

用簡易方程解答應用題的教學

李源順(2015)建議利用以下對比的方法，讓學生掌握如何應用代數思維來解題。

解一步方程例子

例：小明有45元，小偉有100元，
小明再多幾元才和小偉一樣多？

算式	算術思維	過渡	代數思維
45 + x = 100	代表小明有(45＋x)元，和小偉的100元一樣多	想像成天平，左邊有(45＋x)元，右邊有100元，兩邊的錢相等	天平兩邊45＋x和100的量是相等的
45 + x - 45 =100 - 45	把小明和小偉的錢，都減去45元，小明和小偉的錢還是一樣多	想像成天平，左右兩邊都減去45元，左右兩邊的錢相等	兩邊減去45，左右兩邊的量，仍然相等
x = 55	小明要再多的錢是55元	想像成天平，左邊是小明要再多的x元，右邊是小偉剩下的55元，兩邊相等	左邊的量x等於右邊的55，仍然相等

用簡易方程解答應用題的教學

解兩步方程例子

例：紅蘋果若干個，青蘋果125個，
每8個蘋果裝成一盒，剛好全部包裝好，
共裝了21盒，紅蘋果共有多少個？

算式	算術思維	過渡	算式	代數思維
$(y+125)\div 8=21$	代表所有的蘋果 $(y+125)$個， 每8個裝成一盒， 共裝成21盒	想像成天平， 左邊有$(y+125)\div 8$盒(也就是所有的蘋果，每8個裝成一盒)， 右邊有21盒， 且兩邊的量相等	$(y+125)\div 8=21$	天平兩邊 $(y+125)\div 8$和21的量是相等的
		左右兩邊是有多少盒，乘以8， 左邊就是所有蘋果的量，右邊也是所有蘋果的量	$(y+125)\div 8\times 8$ $=21\times 8$	兩邊乘以8， 左右兩邊的量仍然相等

用簡易方程解答應用題的教學

解兩步方程例子

例：紅蘋果若干個，青蘋果125個，
每8個蘋果裝成一盒，剛好全部包裝好，
共裝了21盒，紅蘋果共有多少個？

算式	算術思維	過渡	算式	代數思維
y+125=21×8 y+125=168	所有的蘋果(y+125)個，就是一盒8個有21盒，共有8×21=168個	左邊變成全部的蘋果(y+125)個， 右邊也是所有的蘋果，一盒8個，有21盒，即是168個	y+125=21×8 y+125=168	左邊變成y+125和右邊21×8的量(即168)仍然相等
y=168-125	所有的蘋果是紅蘋果和青蘋果組成的，所以紅蘋果y個就是所有蘋果扣去青蘋果的量，即是(168-125)個	左右兩邊的蘋果各減去青蘋果的數量125個	y+125-125=168-125	左右兩邊各減去125的量，仍然相等
y=43		左邊是紅蘋果的量，右邊也是紅蘋果的量43個， 仍然相等	y=43	左右兩邊的量，仍然相等， 所以y=43

用簡易方程解答應用題的教學

筆者建議

例1：學生14人，其中男學生有6人，女學生有多少人？

**思考方法：以「女學生有多少人？」為先，
思考與其他資料的關係。**

女學生人數	+	男學生人數	=	學生人數
?人	+	6 人	=	14 人
?	+	6	=	14

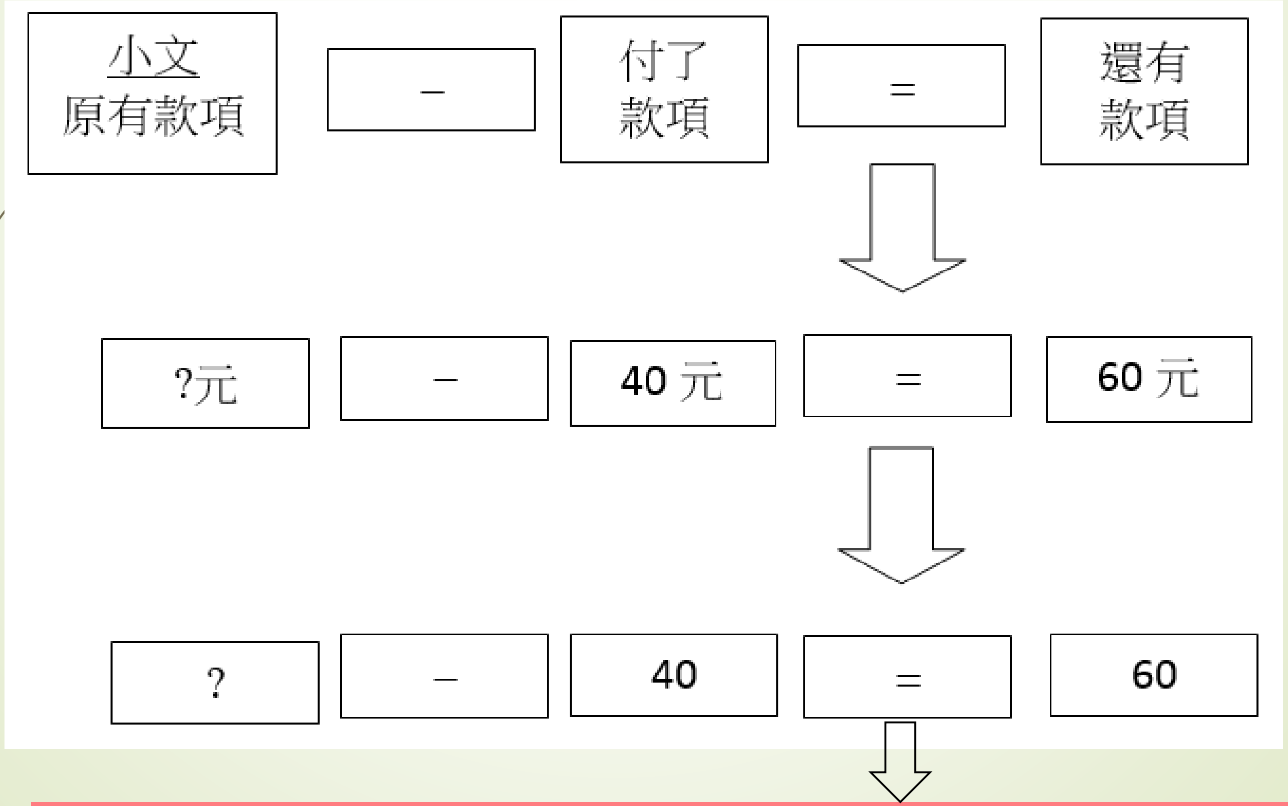
$$x + 6 = 14$$

用簡易方程解答應用題的教學

筆者建議

例2：小文付了40元交通費後，還有60元。小文原有多少元？

思考方法：以「小文原有多少元？」為先，
思考與其他資料的關係。



x － 40 ＝ 60

用簡易方程解答應用題的教學

筆者建議

例3：小華的數學測驗成績是84分，比小文的少12分。
小文的數學測驗成績是多少分？

數學語言的理解：「…比…多／少…」

比小文的少12分

⇩

小華的數學測驗成績比小文的少12分

或

小文的數學測驗成績比小華的多12分

用簡易方程解答應用題的教學

筆者建議

例3：小華的數學測驗成績是84分，比小文的少12分。
小文的數學測驗成績是多少分？

思考方法：以「小文的數學測驗成績是多少分？」為先，
思考與其他資料的關係。

方法1

小文的數學測驗成績	−	小華的數學測驗成績	＝	相差的分數
?分	−	84 分	＝	12 分
?	−	84	＝	12

x − 84 = 12

用簡易方程解答應用題的教學

筆者建議

例3：小華的數學測驗成績是84分，比小文的少12分。
小文的數學測驗成績是多少分？

思考方法：以「小文的數學測驗成績是多少分？」為先，
思考與其他資料的關係。

方法2

小文的數學測驗成績	−	相差的分數	＝	小華的數學測驗成績
?分	−	12 分	＝	84 分
?	−	12	＝	84

$x - 12 = 84$

其他學習難點

(1)涉及乘法的理解

因為會利用英文字母作為代數符號，然而英文字母「x」和乘號「×」十分相似，故此在代數範疇中的乘法運算的符號表示方式就和數範疇中的乘法表示方式不同了，我們會用「·」或者空白來表示數乘以代數或代數乘以代數。

例如：

$x \times 6 = 6 \times x = 6 \cdot x = 6x$ (利用交換律)

(2)涉及除法的理解

因為兩數相除的概法和分數的概念可以連結起來，故此，在代數範疇中的除法通常也會用分數的方式表示出來。

例如：

$$x \div 6 = \frac{x}{6}$$

其他學習難點

(3)對$1\frac{2}{3}x$ 的誤解

在數範疇中，$1\frac{2}{3}$ 當中的省略符號是代表「加」，

在代數範疇中，$\frac{2}{3}x$ 當中的省略符號是代表「乘」，

故此學生面對$1\frac{2}{3}x$ 時，會感到困難。

其他學習難點

(4)涉及負數

例如： $30 - j = 16$

由於學生沒有學習過負數，因此不可以兩邊同時減30，變成： $-j = 16 - 30$

所以要利用加法等量公理、加法交換律、減法等量公理來運算。

$$30 - j = 16$$

$$30 - j + j = 16 + j$$ （加法等量公理）

$$30 = 16 + j$$

$$30 = j + 16$$ （加法交換律）

$$30 - 16 = j + 16 - 16$$ （減法等量公理）

$$14 = j$$

$$j = 14$$

參考文獻

甯平獻(2014)。<<數學教材教法>>。台灣：五南圖書出版股份有限公司。

黃家樂、李玉潔(2007)。<<式子「 $x = 11+5$ 」是一道方程嗎？>> 。數學教育第24期。香港： 香港數學教育學會。

陳嘉皇 (2006)。<<國小五年級學童代數推理策略應用之研究：以「圖卡覆蓋」解題情境歸納算式關係為例>>，屏東教育大學學報，25(9)，381-412。

謝佳叡 (2003)。從算術思維過渡到代數思維。九年一貫課程綱要諮詢小組諮詢意見書。線上檢索日期：2017年3月8日。網址：http://abel.math.ntnu.edu.tw/~lyz/%AC%A5%B6%A7%A4l%AA%BA%A7@%AB~/%B1q%BA%E2%B3N%AB%E4%BA%FB%B9L%B4%E7%A8%EC%A5N%BC%C6%AB%E4%BA%FB.doc

傅學燕 (2011)。對小學列方程解應用題的教學建議。線上檢索日期：2017年2月24日。網址：http://www.edb.gov.hk/attachment/tc/edu-system/primary-secondary/applicable-to-primary-secondary/sbss/sbps/ssp-scheme/mainland-hk-teachers-exchange-programme-maths/2011-12-essays/7.pdf

李源順(2015) 。<<數學這樣教國小數學感教育>>。台灣：五南圖書出版股份有限公司。

提問與交流

謝謝！

聯絡方法 : judypytang@yahoo.com.hk