



以建模活動探討怎樣提升 小學生的數學思維能力

羅浩源

香港中文大學課程與教學學系

鄧志文

天水圍天主教小學

現今數學教育期望

- 加強師生之間的課堂互動
- 提高學生的思維和溝通能力
- 讓學生更能在日常生活中應用數學知識

《數學課程指引（小一至小六）2000》

數學科的其中一個教學目標

- 發展學生的思維、傳意、解難及
創造能力

《數學課程指引（小一至小六）2000》

傳統的數學課堂解難訓練中

- 從特定情境找出資料，運用數學知識按步計算答案
- 著重培養學生的運算能力
- 未能全面及有效培養學生的數學思維及解難能力

建模活動

- 在數學課堂讓學生分組參與建模活動，共同探究一個真實情境的問題
- 尋找問題的目標，構思相關的模型（Model），探討解決問題的辦法
- 建模是一個循環過程（cycle process），學生透過與同儕互動找出最適合的模型來解決問題，學生的思維、解難、溝通及傳意能力會因不斷地得到鍛鍊而有所提升

（ Lesh & Doerr , 2003 ）

建模活動相比解文字應用題

- 學生對問題作出描述 (description) 及解釋 (explanation) — 解難過程中產生的概念工具 (conceptual tools)
- 學生在建模的循環過程會不斷測試及修改其對原來問題的想法
- 建模活動是針對一個真實情境問題而發展的一套解難工具，有清晰的特定用家及目標。只要給予一定的發展時間，這套工具亦可處理多個不同情境，是一套可以分享、重用及修改的工具。 (Lesh & Harel, 2003)

小學生進行數學建模

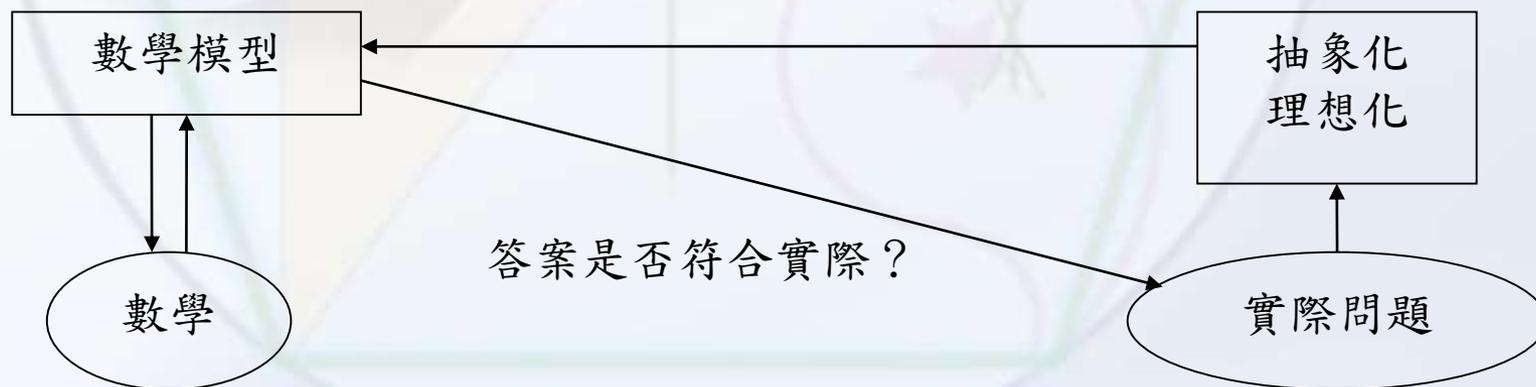
- 一般認為數學建模涉及高深的數學知識及高層次的思維能力，適宜在高中或大學的數學課程中教授
- 如果老師能夠為小學生們提供一些好問題，讓他們運用所學的數學概念、方法及工具去思考、推論及經驗數學化，有助培養學生的數學建模能力 (Lamon, 2003, p. 24)
- 讓小學生參與數學建模活動亦能夠使他們在數學及社交有相當的得益 (English, 2003, p. 4)

研究目的

- 分析小學生利用數學建模活動進行數學解難的表現
- 了解學生在建模活動下的思考方法及運用數學進行推論的方式
- 探討怎樣利用建模活動提升學生的數學思維能力，找出對數學教學的啟示

數學建模

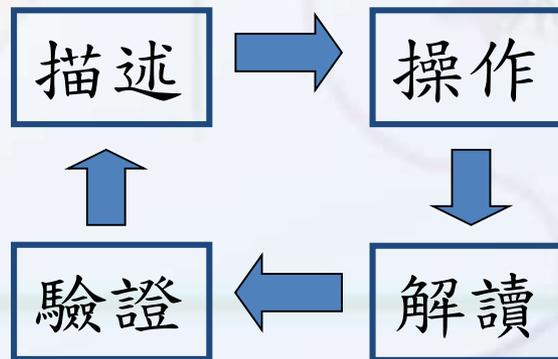
- 將實際問題轉化成為數學的語言，運用適當的數學方法進行處理（抽象化）
- 建立一些假設（理想化），從假設中推論出結果，從實際觀測驗證結果是否吻合，若不吻合便修改模型，以便得到一個接近實際情況的模型



(蕭文強，1995，p. 103)

建模活動 (Modeling eliciting activities)

- 學生建立一套可分享、可操作、可修改、可重用的概念工具 (conceptual tools)，用作建構、描述、解釋、操作、預測及控制一些具有數學意義的系統 (mathematically significant system)，這套概念工具被稱之為模型 (Model)
- 運用建模活動進行數學解難會經歷以下循環過程



(Lesh & Doerr, 2003)

建模活動 (Modeling eliciting activities)

- 描述 (Description) : 將模型與原本問題建立關聯
 - 操作 (Manipulation) : 對模型進行操作以便對原來問題產生推測、假設及進行解難
 - 解讀 (Translation) : 解讀及運用以上的解難結果以處理原本問題
 - 驗證 (Verification) : 驗證這些推測或行動對原來問題是否適用
- (Lesh & Doerr, 2003)

建模活動

- 學生會利用語言、圖表、符號、公式、圖象、隱喻或其他表達方式，表達為該真實世界問題所建立的數學模型，利用這個模型發展出一套解決問題的方法
- 同儕們對不同模型進行比較、測試、取捨，找出解決問題的最佳模型，透過驗證有關模型的適用性，對所建立的模型進行修訂及優化，以便將有關模型發展成為可以解決一般同類真實世界問題的工具

(Lesh, Doerr, Carmona & Hjalmarson, 2003)

傳統的數學解難策略

- 繪畫圖解、處理類似問題、找尋已知條件及認清目標，會因個人對問題的誤解而不能發揮功效
- 在建模活動下，學生需要自行解譯原來問題，認清目標及發展合適的解難方法，向同儕分享其想法並從中獲取回饋
- 若個人對問題有誤解，在同儕互動下修正想法，以便發展更合適的解難方法

(ZawoJewski & Lesh, 2003, p. 317-336)

研究方法

- 將32位小四學生分成3至4人一組，每組運用建模活動解決一個真實世界的問題
(修改自Lamon, 2003, p. 30)
- 老師觀察各組的討論表現，摘錄他們的討論內容，收集每組寫下的解難步驟及方法，然後再與個別學生進行訪談；從這些數據中分析學生解難時的思維及推論方式，藉此研究怎樣利用建模活動以提升他們的數學思維及解難能力。

分組建模活動的數學問題

張先生是一個蘋果園的園主，每當果園裏的蘋果樹有收成，他都會將蘋果摘下並運往市場售賣。第一年他只種了一棵蘋果樹，之後他每年都會多種幾棵蘋果樹，好使他每年的收成都會比往年更多，而果園內的蘋果樹每年的分佈都是呈正方形排列如下圖：



(●的數目為張先生在該年新種的蘋果樹的數目，○的數目是已存在的蘋果樹的數目)

今年他多種了 15 棵蘋果樹，請問他的果園內現在有幾多棵蘋果樹？

**答案：1 + 3 + 5 + ... + 15 = 64，或 $8 \times 8 = 64$ ，果園內現在有 64 棵蘋果樹。

研究結果及討論

- 32位小四同學約分成八組，有四組同學（下稱甲組同學）能清晰地以圖解及演算步驟表達其數學解難的思維過程，其餘的四組同學（下稱乙組同學），部份可以猜出或算出答案但未能清晰地表達，有些則未能找到答案。
- 只會集中討論甲組同學解難過程中的數學思維

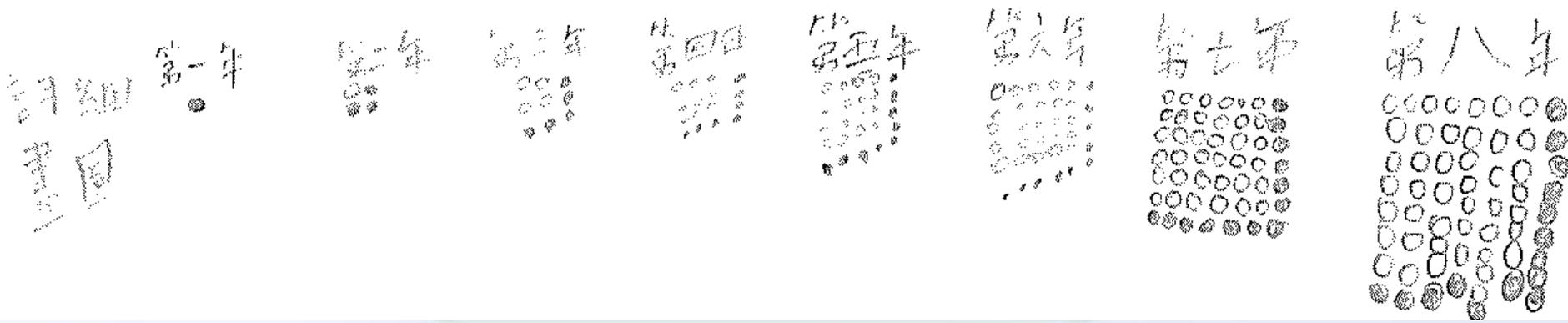
甲、乙兩組同學的背景

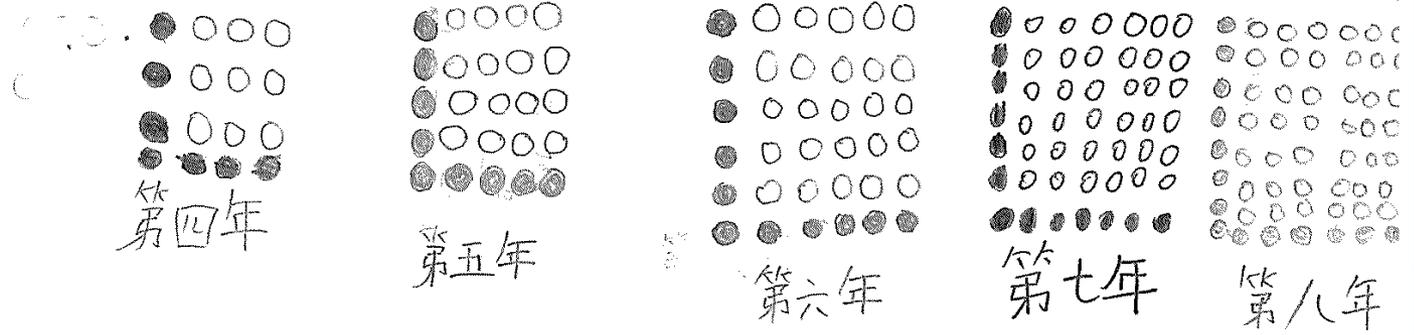
甲組		乙組	
組別一、二	平均能力班別	組別一、二、 三、四	平均能力班別
組別三、四	高能力班別		

甲組(組別一)學生答題紙

$$\begin{aligned} & (1+3+5+7+9+11+13+15) \\ & = (1+9+3+7+5+11+13) \\ & = (10+10+20+11+13) \\ & = 64 \end{aligned}$$

他的果園內現在有64棵蘋果樹



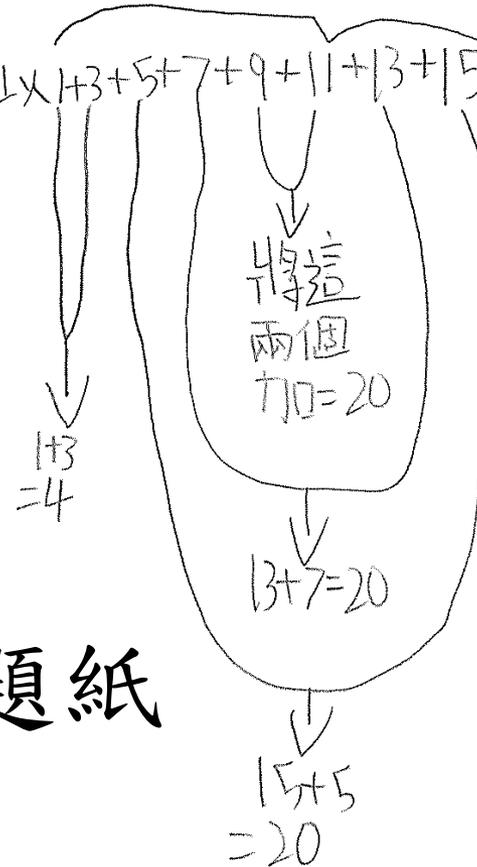


= 64 (棵)

(另一方法)

因為每年是多了兩棵果所以 $1+3+5+7+9+11+13+15$ 我就將可進
加起來

之後將全部加起來
 $20+20+20+4$
 = 64 (棵)



甲組(組別二)學生答題紙

甲組(組別三)學生答題紙

尾項首項 本即高
 ↓ ↓ ↓
 $(15 - 1 \div 2 + 1) \times (1 + 15)$
 $= 64$

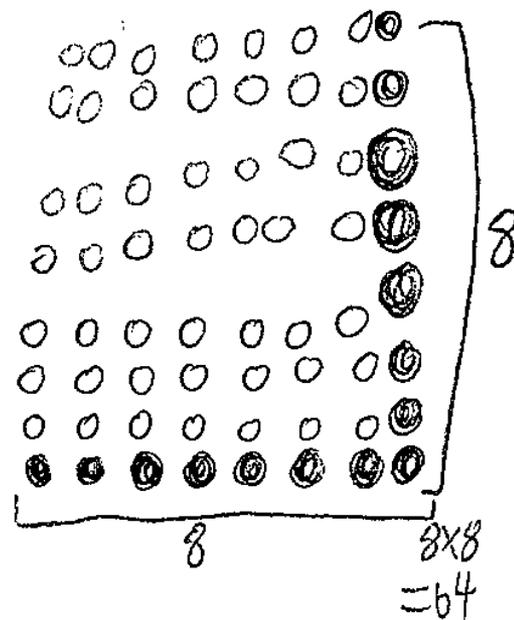
e.g.

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$

$$= 4 + 12 + 20 + 28$$

$$= 16 + 48$$

$$= 64$$



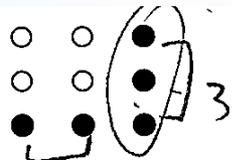
甲組(組別四)學生答題紙



第一年



第二年



第三年

$$31 \div 2 = 15 \dots 1$$

(●的數目為張先生在該年新種的蘋果樹的數目，○的數目是已存在的蘋果樹的數目)

今年他多種了 15 棵蘋果樹，請問他的果園內現在有幾多棵蘋果樹？

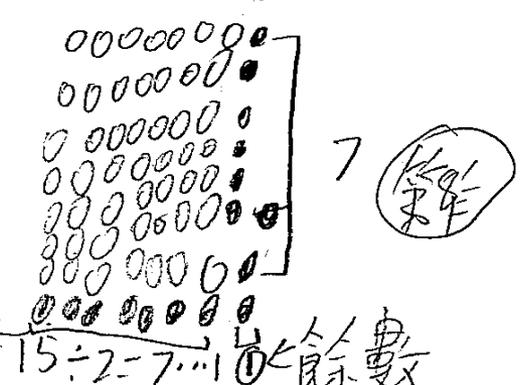
$$1 + (2+1) + (3+2) + (4+3) + (5+4) + (6+5) + (7+6) + (8+7) = 64$$

↑ 1 棵 1 年 ↑ 2 棵 2 年 ↑ 3 ↑ 4 ↑ 5 ↑ 6

$$\begin{array}{r} 16 \times 16 \\ \hline 160 \\ 96 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$(7+6) + (8+7) = 64$$

↑ 7 ↑ 8 年 8x8 共 64



同學經歷了建模四個循環過程

- 描述 (Description) : 利用算式或圖解模擬原來的問題 (建立模型) , 將原來的問題數學化
- 操作 (Manipulation) : 利用算式或圖解進行計算
- 解讀 (Translation) : 運用計算結果解答原來的問題
- 驗證 (Verification) : 利用算式及圖解互相驗證模型是否有效、合理及適用於多個不同情況

同儕互動作用

- 修正了自己的想法
- 加深對問題的了解，更能認清問題的目標，重新將問題演繹，發展合適的解難策略

學生數學思維簡表

解難方法	數學	效能
方法一： $1+3+5+7+9+11+13+15$ （多種的樹數）= 64 （樹的總數）	連續單數加法， 合十加法	容易理解，操作簡單，但計算速度較慢。
方法二： 繪畫對應的正方形排列分佈圖，或利用計算的方法，算出在不同的多種樹數下，正方形排列每邊的樹數；例如若多種15棵樹，則正方形每邊都有8棵樹，合共 $8 \times 8 = 64$ 棵樹。	正方形數（平方數）排列、乘法、四則運算	能較快計算出答案，但需要正確地從多種的樹數推算出正方形排列每邊的樹數才有效。
方法三： 方法一的變形，利用（（尾項 - 首項） \div 差 + 1）找出項數，並利用（（首項 + 尾項） \times 項數 \div 2）找出樹的總數。 即 $(1+15) \times ((15-1) \div 2 + 1) \div 2 = 64$ 棵樹	四則運算、利用等差級數計算方法推出連續單數和的計算方法。	只要放入適當的參數（尾項、首項及差），即可算出答案，但推出有關「公式」需要較高的數學能力。

（參考：Chamberlin, 2004）

學生建模的經驗反映

- 學生能夠運用不同的數學元素，利用適當的表達系統加以聯系以表達其思維過程 (Lesh & Doerr, 2003)
- 透過計算及繪圖，建構出式 $1+3+5+..+(2n-1)=n^2$ ，並加以驗證
- 整套解難方法是同學們自行建構
- 老師只是一位啟發者：提供問題，引導同學觀察、作出假設、驗證
- 體現數學思維中的「一般化 (Generalising)」及「特殊化 (Specialising)」，「猜想 (Conjecturing)」及「論証 (Convincing)」等過程 (Stacey, 2006)
- 培養學生的共通能力 (創造力、批判思考、運算、解決問題、研習等)

反思（數學教學的啟示）

- 好的數學問題能夠激發學生運用數學思維進行解難及推論，有系統地運用數學語言表達
- 多讓學生分組運用建模活動進行解難，以此作為教學活動、課業、甚至專題研習，鍛鍊學生的數學思維、推論及傳意等能力
- 給予學生清晰的指引，引導學生尋找問題的目標，將大目標分拆成數個小目標，辨別及觀察問題給予的資料，從資料比較中找出規律，定下問題的假設及猜想，並運用適當的數學表達方式（計算、列表、作圖）記錄思維的過程，整理成有系統的解難步驟
- 鼓勵小組討論及交流，優化他們的想法。

反思（數學教學的啟示）

- 同學在小組討論中，比較及綜合不同的意念，促使他們更快地想出解決問題的正確方法
- 在同儕的互動及支持下，同學的數學思維得到成長，數學解難的自信心亦增強了
- 安排學生以小組互動的方式進行數學建模活動（Lesh & English, 2005），在小組內塑造開放及自由討論的氣氛，鼓勵學生互相分享對問題的理解及思維方法，指導學生比較、評鑑及綜合不同的想法，凝聚共識以得出最佳的解難策略
- 採用異質分組，鼓勵能力較高的學生協助能力較遜色的組員思考，建立團隊合作的氣氛

反思（數學教學的啟示）

- 建模是一個循環過程，容許多次的修模，以找出最適合的模型
- 培養學生自我優化及完善的態度

結語

- 數學建模活動提供了一個良好的平台讓學生發現及運用數學進行現實生活問題的解難，有助發展學生的思維、傳意及解難能力
- 按數學課題設計及安排合適的數學建模活動，讓學生生活用數學解決現實生活問題
- 學生數學學習不只局限於一些「非真實」的文字題，而是變得更活生生和更有意義