

行程圖和速率

張曉恩

大綱

- 教學試驗的緣由
- 教學試驗的設計
- 對STEM教育的啟發

CHILD'S CONCEPTION OF MOVEMENT AND SPEED

By Jean Piaget

PIAGET (1970)

- ‘The Child’s Conception of Movement and Speed’
- 探討兒童對位置、位移、速率和加速度概念的發展
- 並將兒童的速度概念發展層次分為四個階段

兒童在建構速率概念的四個發展階段

階段I： (5-6歲)	以直觀的超越現象作為判斷速率的依據。
階段II： (6-7歲)	知道時間相同，所行走距離較遠，則速率較快。但易受位置前後而影響速率的判斷。
階段IIIa： (7-9歲)	明白在「同時運動」中，以移動距離來判斷速率。
階段IIIb： (9-11歲)	能正確判斷「等時不等距」和「等距不等時」的速率。
階段IVa： (9-11歲)	「不等時不等距」的情況下，以比例調整其中一變量至相等，再以另一變量比較速率大小。
階段IVb： (10-12歲)	具有速率計算的能力，瞭解時間、距離和速率三者之間的關係。

陳嘉慧和張麗芬(2008)

故有的教學脈絡

先教 **速率**，後教 **行程圖**。

「量 A 相對於量 B 的率」是指下列的一個新的量 C:

$$C = \frac{\text{量 A}}{\text{量 B}}$$

速率是一個二項率，速率 = $\frac{\text{走了的距離}}{\text{走這段距離所需的時間}}$

馮振業(2004)

迷思與困難

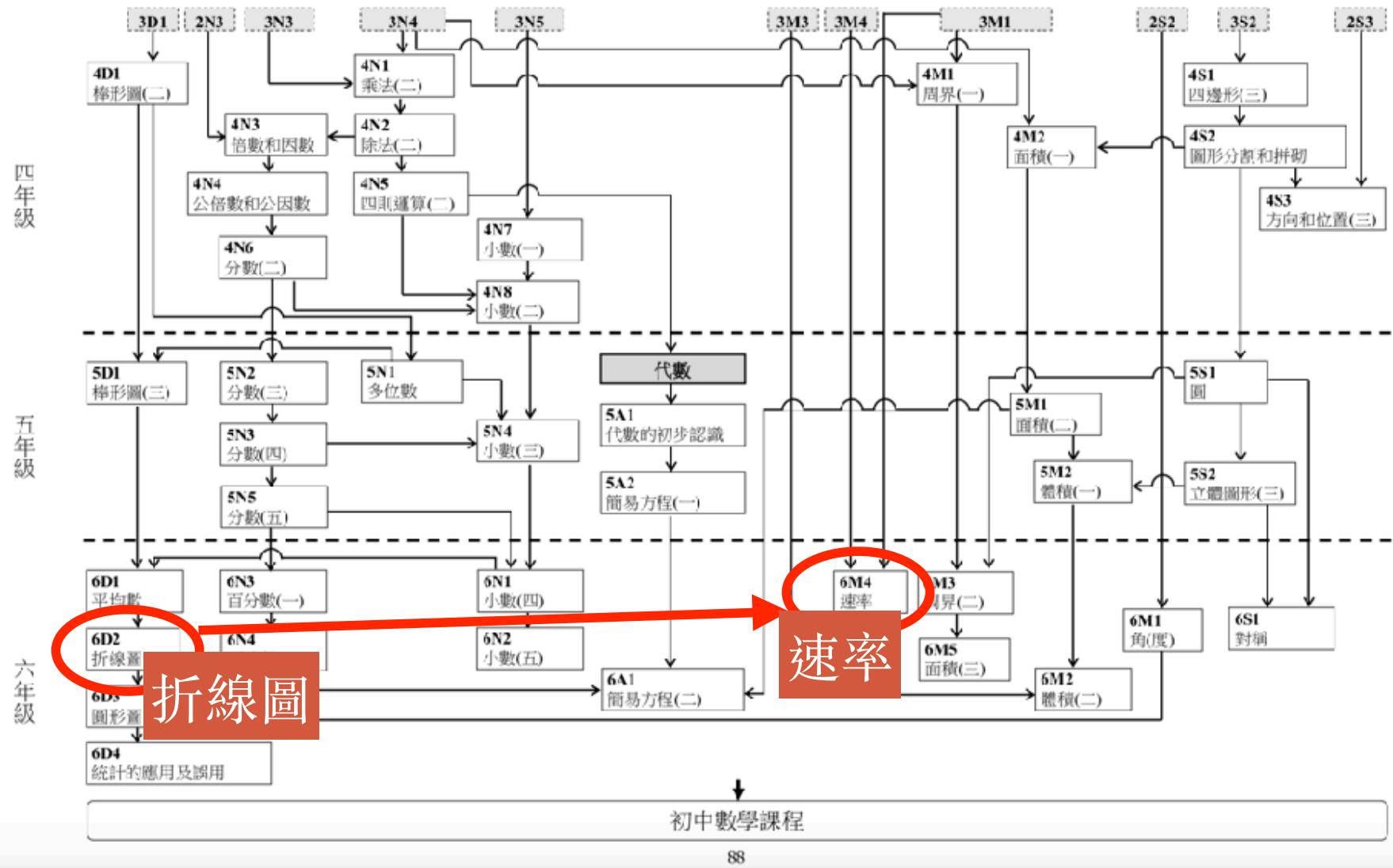
- ◆ 無法分辨「速度(*velocity*)」和「速率(*speed*)」的差異
 - 位移
 - 距離（路徑長）
 - 有方向
 - 沒有方向
- ◆ 不理解「速率」的定義和速率單位的意義
- ◆ 速率的應用涉及多個概念
 - 如分數、除法、比例、單位轉換等
- ◆ 未能準確描述行程圖

是次教學試驗的重點

先教 **行程圖**，後教 **速率**。

- 條件：折線圖為已學知識
- 原因：行程圖具體地呈現距離和時間的關係，
並從中引入速率可加深對其認識
- STEM教育：於教授數學時，加入適當的科學、
科技或工程元素

數學教育學習領域課程指引補充文件 2017



初中數學課程



1. 介紹行程圖的定義

沿著直線移動的行程，可以用圖像來表示。
我們稱這圖像為行程圖。



2. 定時紀錄行走距離

- 明白行程圖紀錄了行走距離相對所用了的時間
- 學生在指定的直線上行走，每兩秒就放下一個豆袋，紀錄行走距離，將結果製作行程圖，討論和比較各人的行程圖

‘Developmental research means:
Experiencing the cyclic process of development
and research so consciously, and reporting on it
so candidly that it justifies itself, and that this
experience can be transmitted to others to
become like their own experience. ,

Freudenthal, H (1991)

自製行程圖



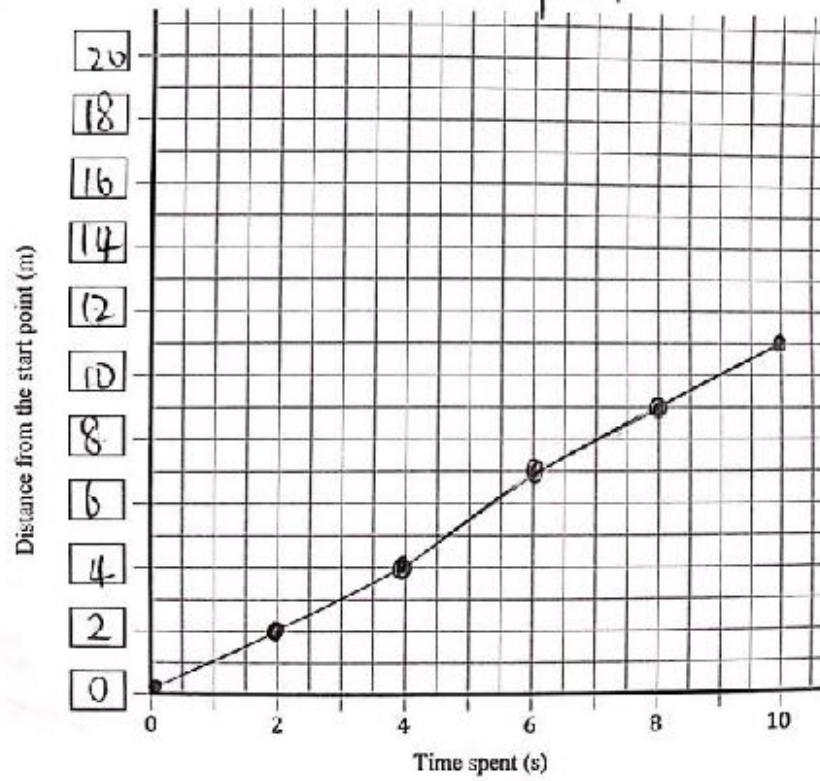
自製行程圖



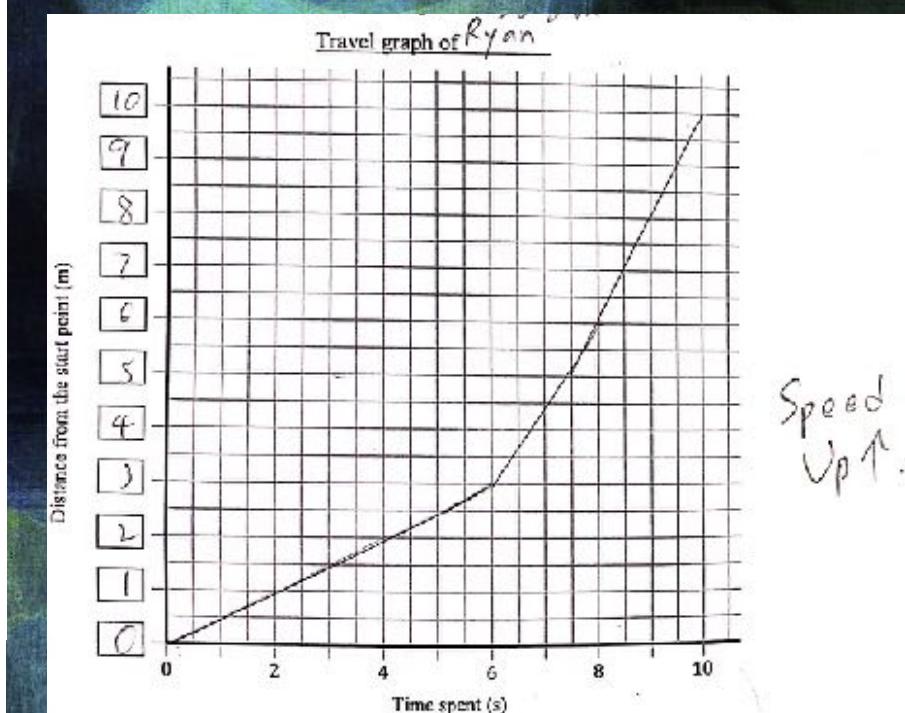
Time	0 s	2 s	4 s	6 s	8 s	10 s
Distance from the start point	0 m	2 m	4 m	7 m	9 m	11 m

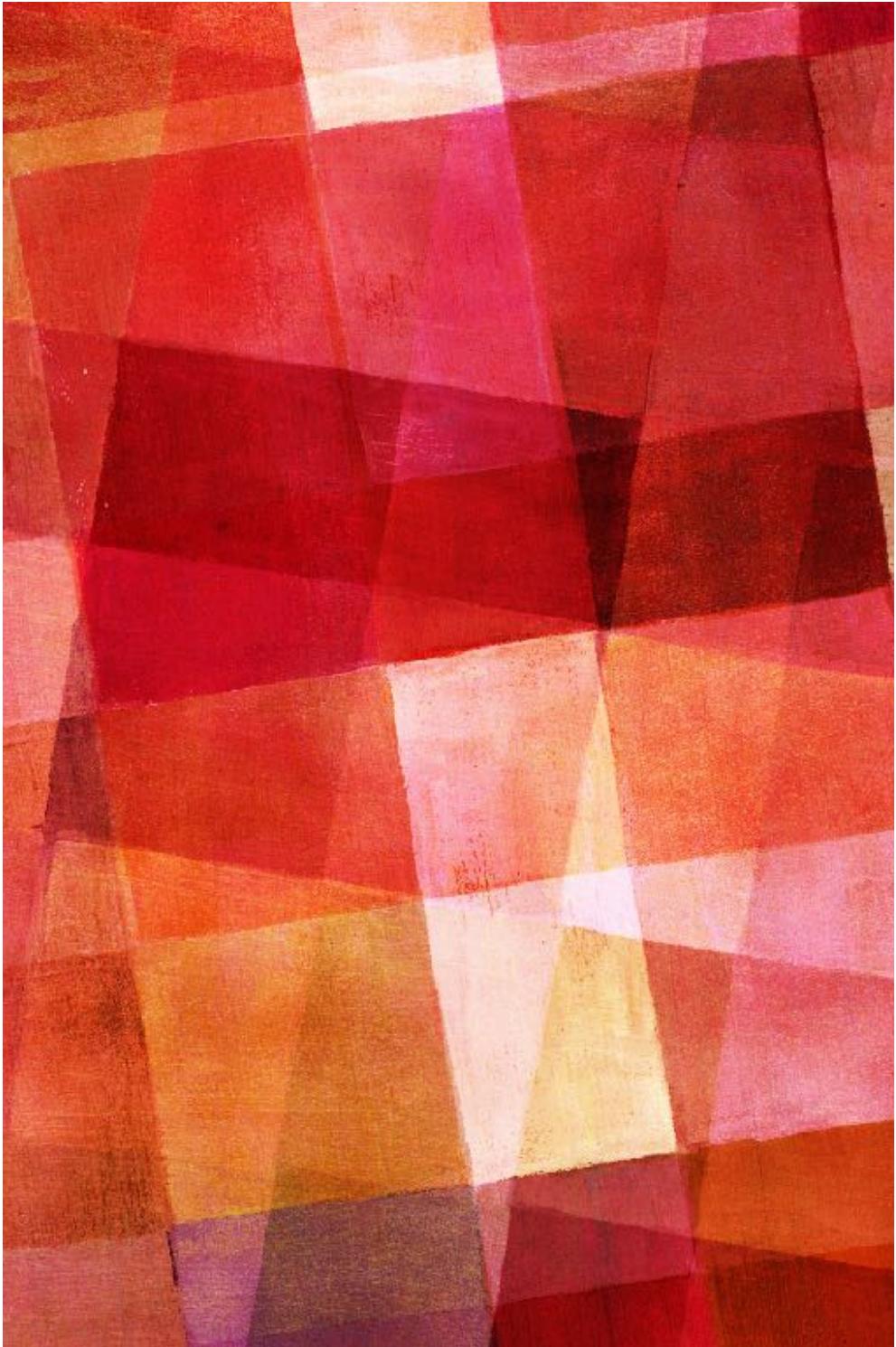
5) Draw the travel graph of this student.

Travel graph of Raphael



Time	0 s	2 s	4 s	6 s	8 s	10 s	
Distance from the start point	0 m	0 cm	2 m 10cm	4 m 34cm	6 m 22cm	8 m 3dm	10 m 10cm





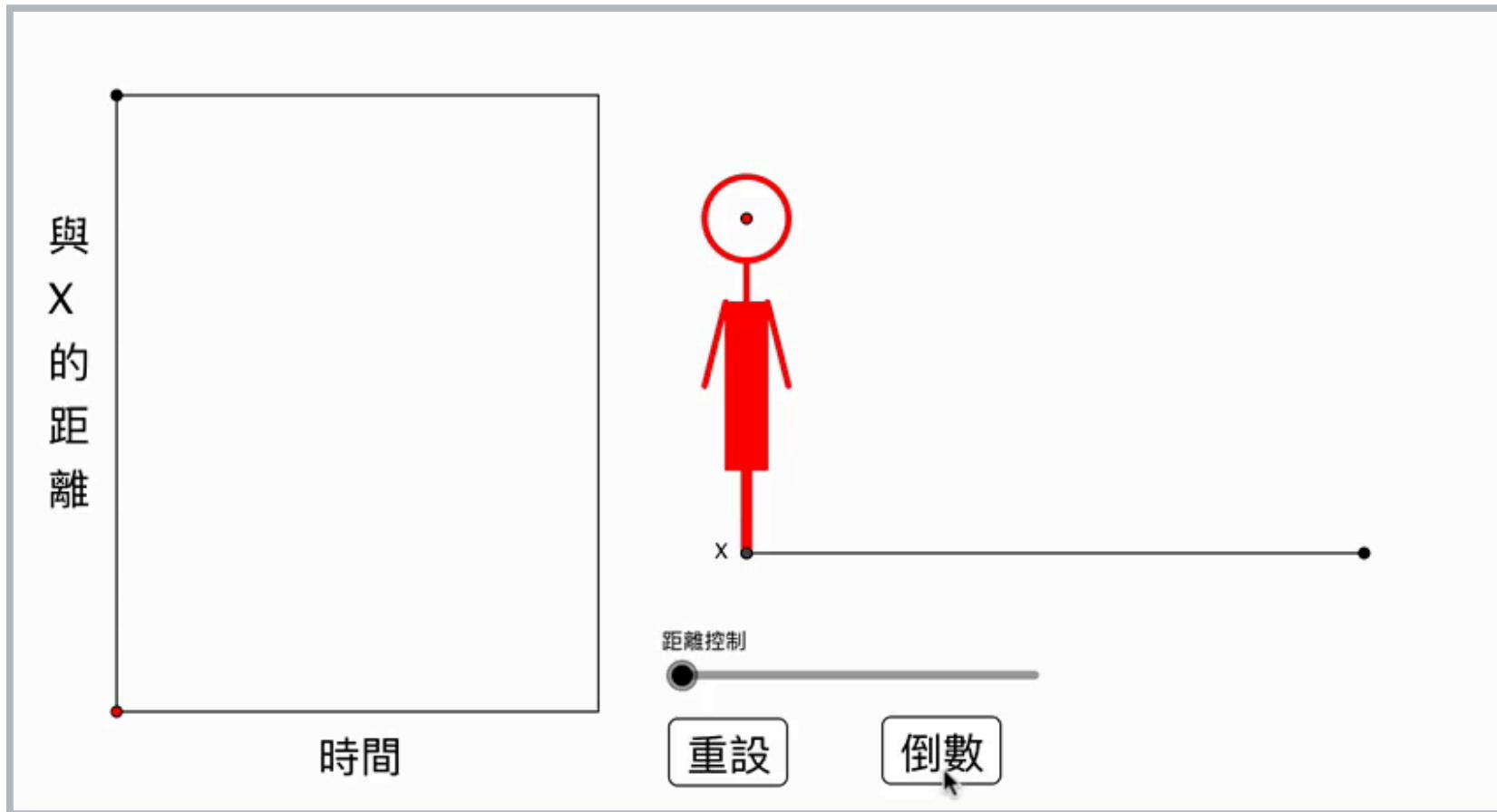
3. 開闢單一行程圖

- 認識不同移動的方式在行程圖上呈現的形式
如物體中途停頓、逆向行走等

- 有效運用資訊科技
如平板電腦的動態幾何軟件
(例如 GeoGebra)
 - ◆ 讓學生感受怎樣移動才會衍生直線圖線

 - ◆ 可具體地呈現圖線變化對移動物體的影響

藉動態幾何自製行程圖

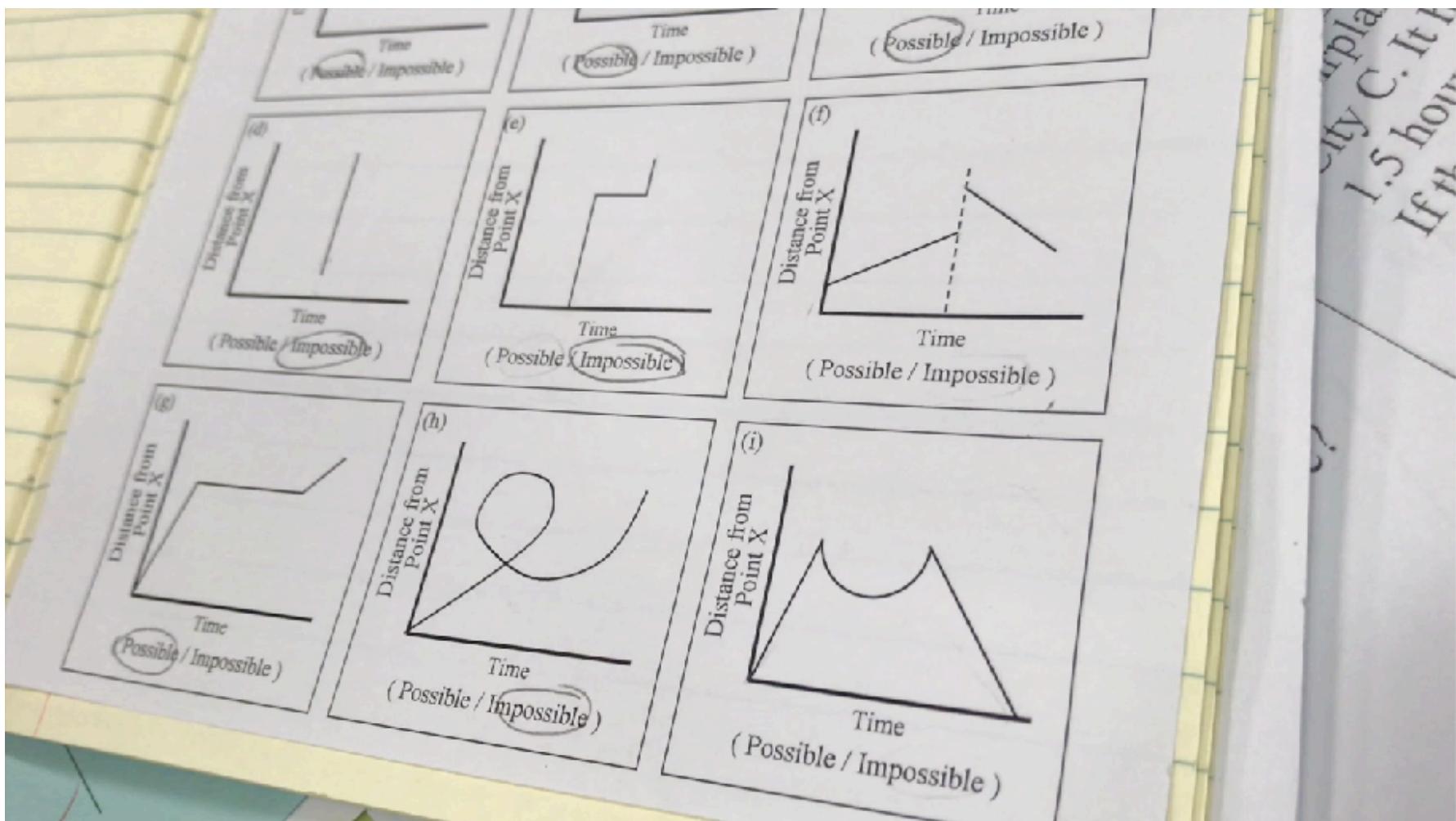


藉動態幾何自製行程圖

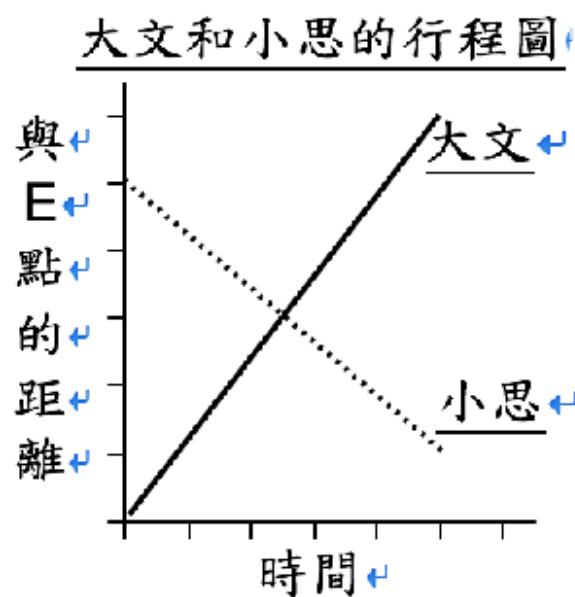
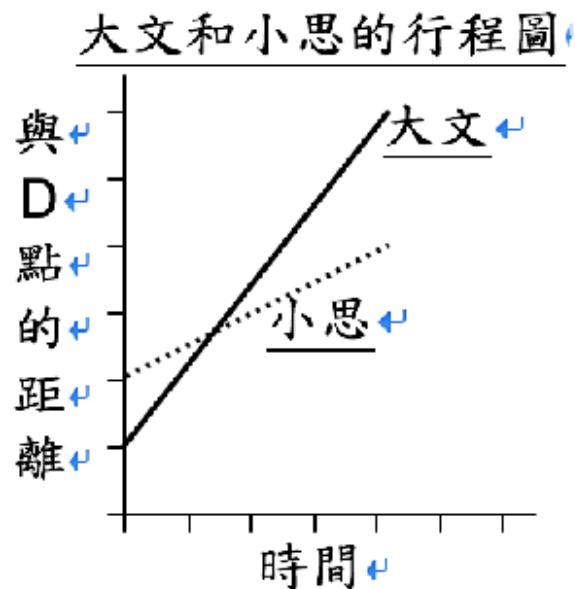


配合行程圖移動

判斷行程圖的可行性



描述行程圖所紀錄的移動



4. 開釋複合行程圖

- 透過比較兩人的圖線，描述他們的起點、終點、行走方向、距離、所用的時間，甚至何時何地相遇和追及等，找出行走較快的一位
- 了解「時距」、「距離」和「速率」三者之間的關係
- 了解「斜率」和「速率」的關係
- 有效運用資訊科技
如平板電腦的動態幾何軟件
(例如 GeoGebra)

‘Thought-experiments as instruments of educational development.

Observing their thought-experiments and reporting on them would have transformed educational developers into educational researchers, who represent their findings together with the arguments, rather than dogmatically. ,

Freudenthal, H (1991)

在「時間」和「行程距離」其一變量不變時，另一變量與「速率」的關係

016

期二

3

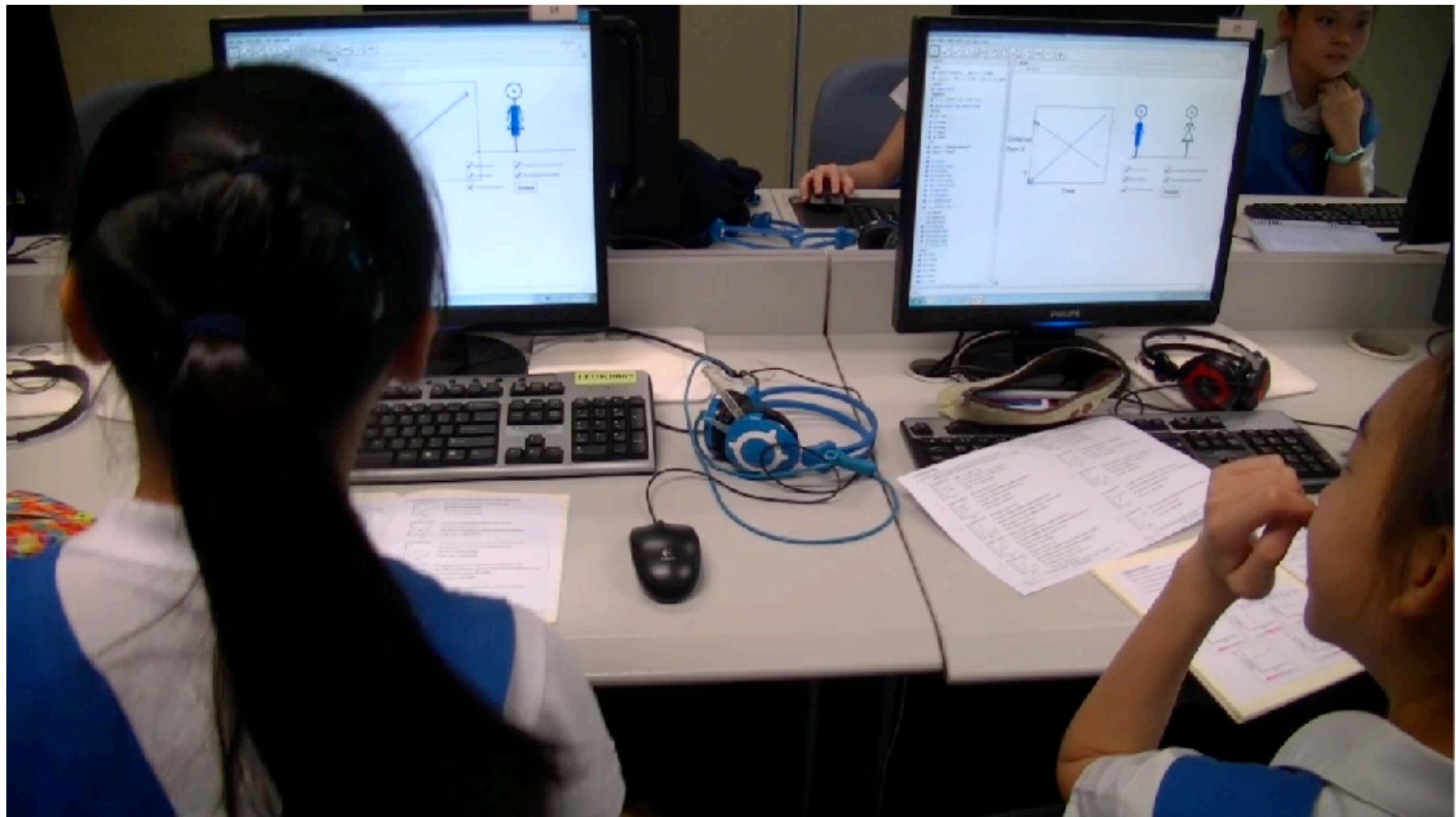
	時距	
	行程距離(米)	時間(單位)
1 文	$0 \rightarrow 600$ $\bullet [600]$	$0 \rightarrow 5$ $\boxed{5}$
鬼	$0 \rightarrow 400$ $[400]$	$0 \rightarrow 5$ $\boxed{5}$
2 文	$200 \rightarrow 600$ $[400]$	$0 \rightarrow 5$ $\boxed{5}$
鬼	$0 \rightarrow 600$ $\bullet [600]$	
3 文	$0 \rightarrow 100$ $[100]$	$0 \rightarrow 4$ $\boxed{4}$
鬼	$100 \rightarrow 500$ $\bullet [400]$	$0 \rightarrow 4$ $\boxed{4}$
4 文	$100 \rightarrow 600$ $\bullet [500]$	$0 \rightarrow 4$ $\boxed{4}$
鬼	$200 \rightarrow 400$ $[200]$	

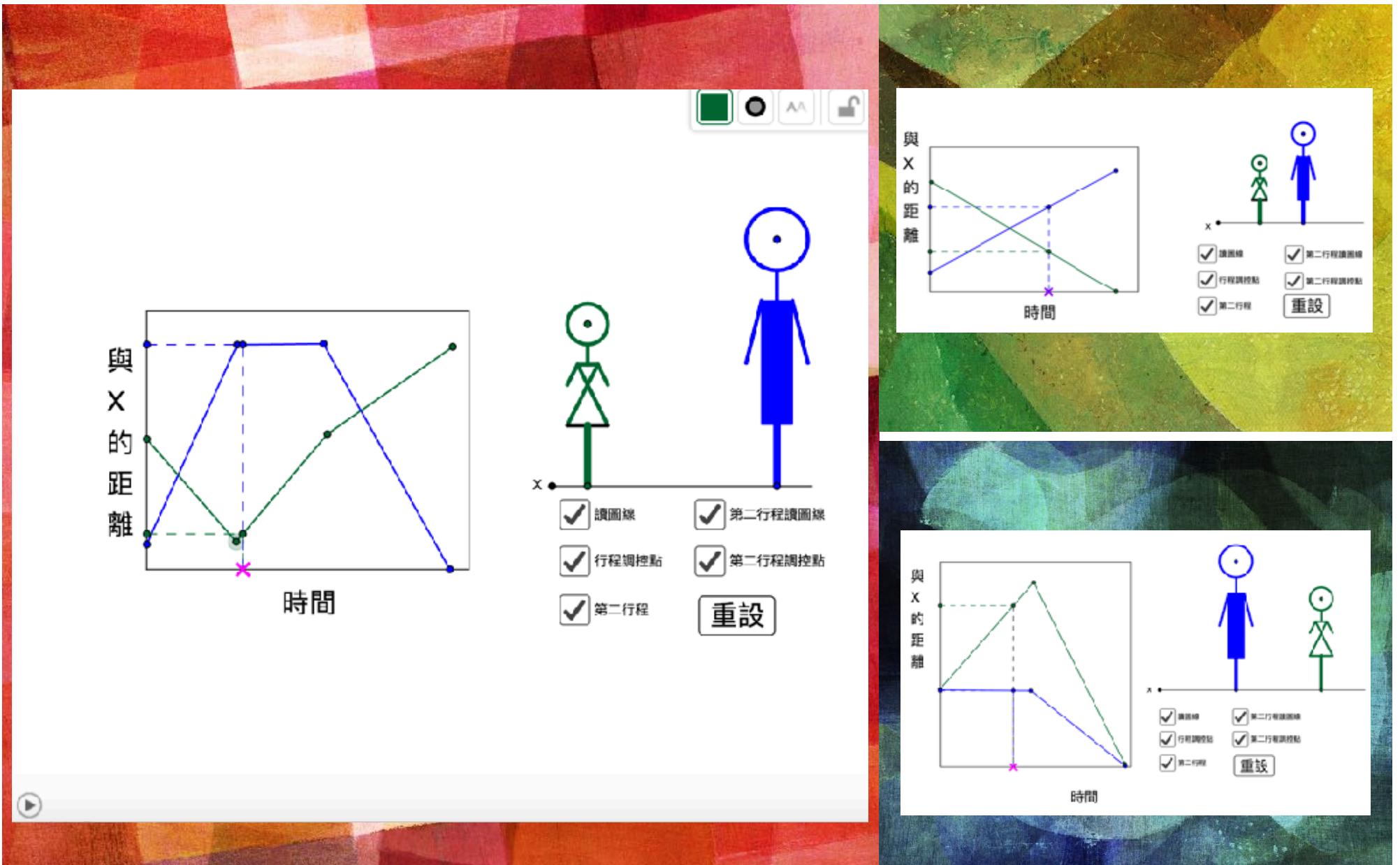
11 相同時距，行程距離愈長，行得愈快

	時距	
	行程距離(米)	時間(單位)
5 文	$0 \rightarrow 400$ $[400]$	$0 \rightarrow 6$ $\boxed{6}$
鬼	$0 \rightarrow 400$ $[400]$	$0 \rightarrow 4$ $\boxed{4}$
6 文	$0 \rightarrow 600$ $[600]$	$0 \rightarrow 3$ $\boxed{3}$
鬼		$\boxed{4}$
7 文	$0 \rightarrow 300$	$\boxed{4}$
鬼		$\boxed{2}$
8 文	$0 \rightarrow 500$	$\boxed{5}$
鬼		$\boxed{12}$

相同行程距離，時距愈短，行得愈快

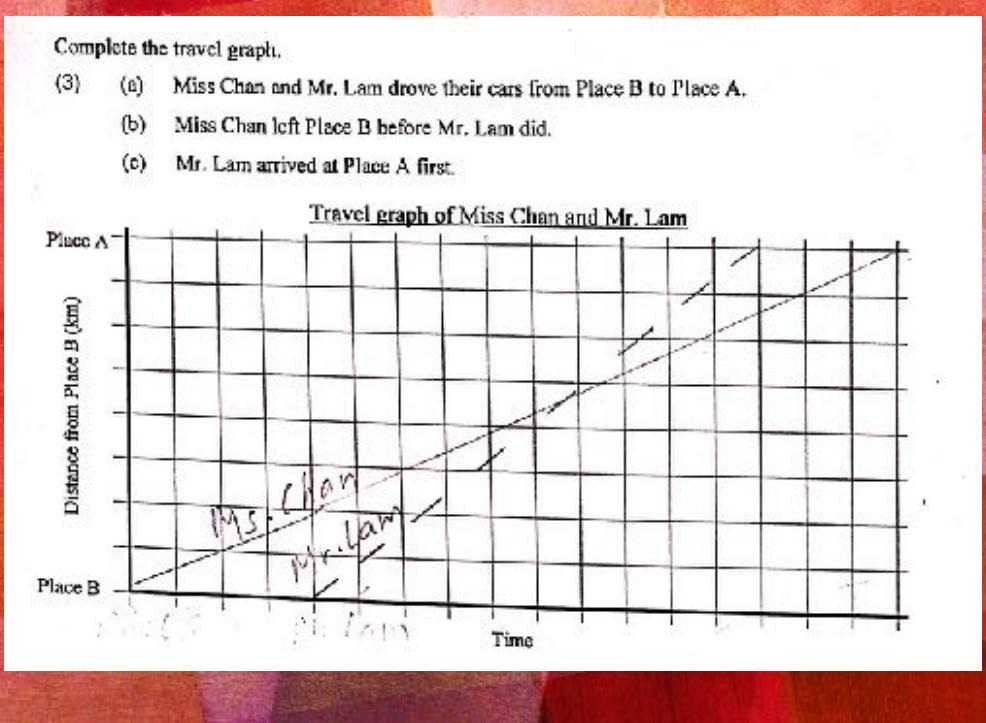
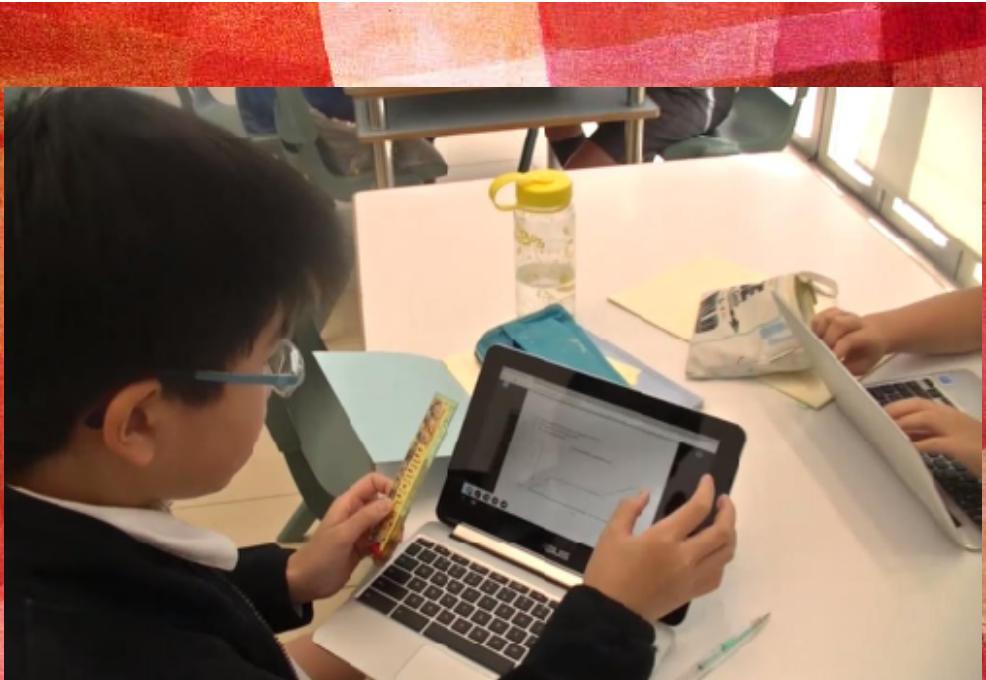
描述及比較行程圖中二人的移動





透過資訊科技照顧學習差異

教師可因應學生能力，提供不同層次的行程圖軟件



5. 進一步閱讀和製作行程圖

- 從行程圖找開始時刻、結束時刻、時距、行走距離等，分辨何時何人走得最快或最慢
- 配以小故事製作單一和複合行程圖
- 加深了解行程圖線和物體移動的關係
- 有效運用資訊科技如平板電腦的動態幾何軟件（例如 Nearpod）

階段I： (5-6歲)	以直觀的超越現象作為判斷速率的依據。
階段II： (6-7歲)	知道時間相同，所行走距離較遠，則速率較快。但易受位置前後而影響速率的判斷。
階段 IIIa： (7-9歲)	明白在「同時運動」中，以移動距離來判斷速率。
階段 IIIb： (9-11 歲)	能正確判斷「等時不等距」和「等距不等時」的速率。
階段 IVa： (9-11 歲)	「不等時不等距」的情況下，以比例調整其中一變量至相等，再以另一變量比較速率大小。
階段 IVb： (10-12 歲)	具有速率計算的能力，瞭解時間、距離和速率三者之間的關係。

6. 引入速率

► 由「等時不等距」及「等距不等時」過渡至「不等時不等距」的情況，判斷速率

► 明白平均速率表示物件在單位時間內的行走距離



► 平均速率 = $\frac{\text{走了的距離}}{\text{走這段距離所需的時間}}$

‘Knowledge can successfully be presented as a product if the process of its acquisition is reproducible—a characteristic of “hard” science. Wherever this condition is not fulfilled, knowledge presented without any indication of the process that brought it about, lacks all characteristics of rationality that distinguish genuine knowledge from dogma. ’

Freudenthal, H (1991)

先比較兩人快慢，轉向比較多人快慢，引入速率

► 「等時不等距」 ← 體育課9分鐘賽跑

► 「等距不等時」 ← 100米賽跑

► 「不等距不等時」



方法1: 統一距離

方法2: 統一時間

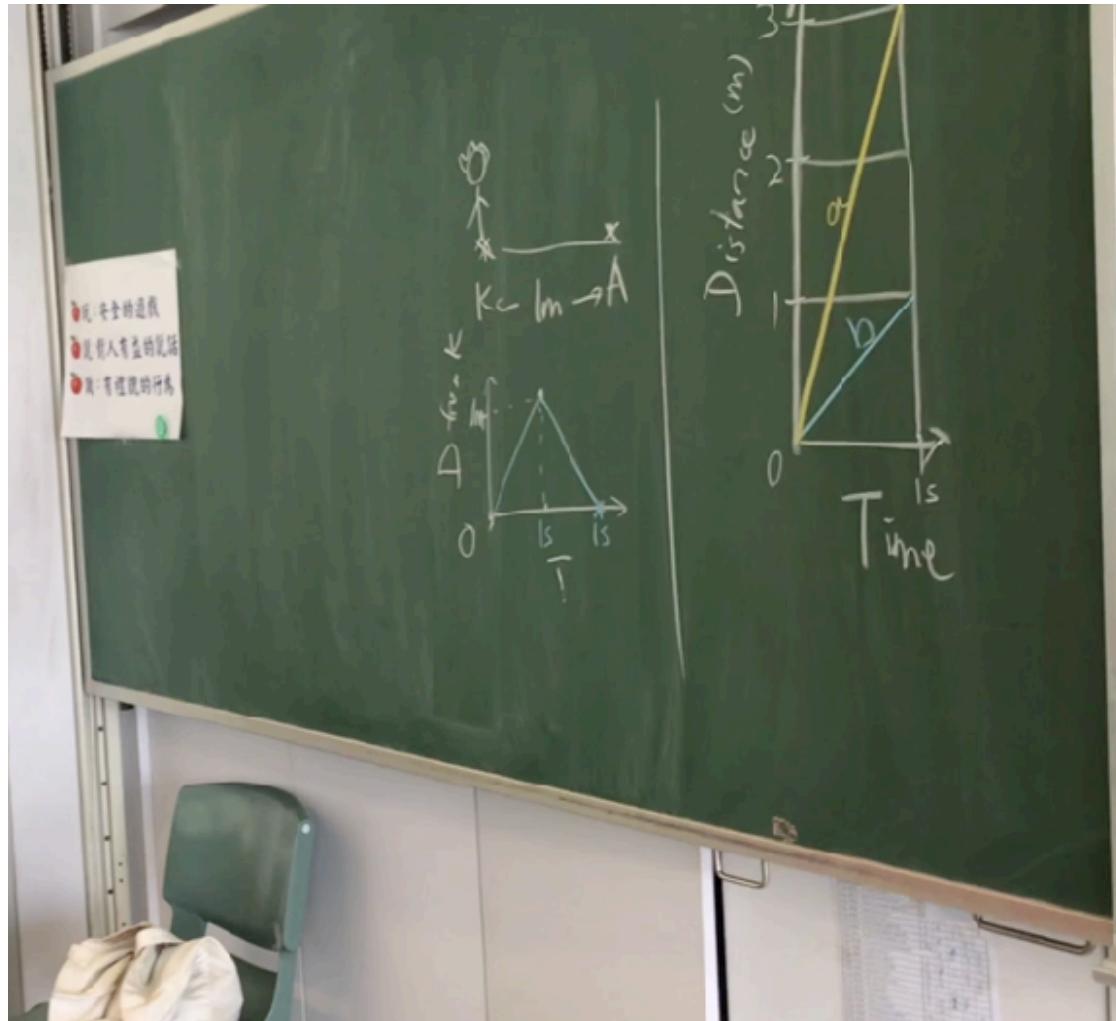
求公倍數相當費時



構作一個測量快慢的量度單位

從行程圖引入速率

3m/s 還是1m/s 快？



7. 找平均速率，及速率單位轉換

► 由已知行走距離和所用時間求出平均速率

涉及距離和時間的單位轉換。

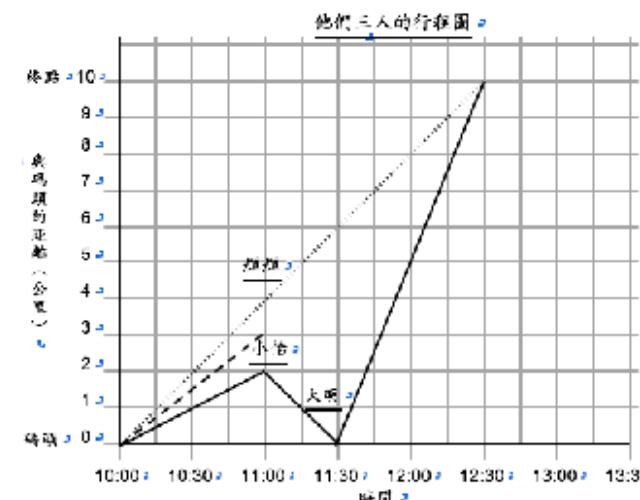
涉及時間單複名數的轉換和60進位的問題時，表現則較遜色。

時間：時間間隔 (活動所需時間)		
現行2000課程		
2M2 時間(二)	以「小時」和「分」報告活動所用的時間。	
3M2 時間(三)	以「小時」和「分」，「分」和「秒」，報告活動所用的時間。	
修訂課程		
學習單位	學習重點	注釋
6M4 速率	<ol style="list-style-type: none">進行時間單位之間的化聚解有關時間間隔的應用題.....	從開始時間、結束時間和時間間隔三者中的兩者，求另一個未知量/時間。
頁52-53	9.	

8. 平均速率、瞬時速率、定速率

大明、小怡和輝輝參加了遠足活動，全程 10 公里。他們在早上十時從碼頭出發。開始不久，大明發現自己的背包遺留在碼頭，因而折返碼頭，幸好他能找回背包繼續遠足活動。
代表大明和輝輝行駛的圖線已記錄在下圖，現在按下面的資料，完成代表小怡行駛的圖線，並計算三人在不同時間的平均速率。

時間	10:00	11:00	11:30	12:30
小怡與碼頭的距離	0 km	3 km	3 km	10 km



时段	辉辉的平均速率	小怡的平均速率	大明的平均速率
10:00-11:00 (首 1 小时)	$\frac{4-0}{1} = \text{(km/h)}$	$\frac{3-0}{1} = \text{(km/h)}$	$= \text{(km/h)}$
11:00-11:30 (接著 0.5 小时)	$\frac{(6-4)}{0.5} = \text{(km/h)}$	$= \text{(km/h)}$	$= \text{(km/h)}$
11:30-12:30 (接著 1 小时)	$\frac{(10-6)}{1} = \text{(km/h)}$	$= \text{(km/h)}$	$= \text{(km/h)}$
10:00-12:00 全旅程 小时	$= \text{(km/h)}$	$= \text{(km/h)}$	$= \text{(km/h)}$

► 平均速率



► 定速率



► 瞬時速率

小巴車速顯示器

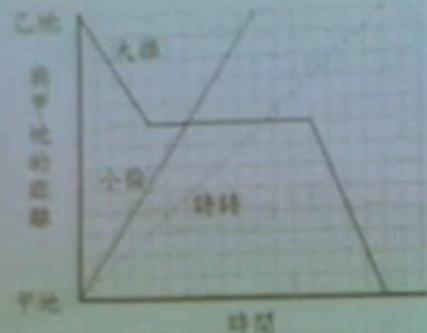
車速限制的討論

行程圖和速率都教畢後的小測試

題目：鋪 (1) 檢測：P66(1)。日期：2-6-09

選擇題，請圈出正確答案。

(1) 由圖(1)大雄、小強和婷婷的行程圖，以下哪些句子能準確形容(1)？



(甲) 大雄休息時，先遇上小強，再遇上婷婷。

(乙) 由於大雄曾休息，所以他走的路比小強和婷婷少。

(丙) 大雄和婷婷的平均速率相同。

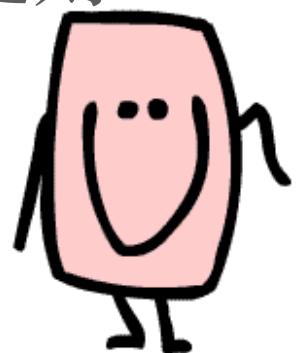
(丁) 小強的速率比婷婷快，且他們是同向而行。

(A) (甲)和(乙)。
 (B) (甲)和(丁)。
(C) (乙)・(丙)和(丁)。
(D) (甲)・(丙)和(丁)。

(2) 由圖(2)熊熊和小君的行程圖，以下哪些句子能準確形容(2)？

總結

- 學生在折線圖的已學知識上，建構對行程圖的認識，可加深了解時間和距離的關係。
- 打好基礎後再引入速率，就變得如魚得水。
- 過程中體現的數學化教學，體驗數學知識從無到有，由粗疏到精密的演變過程，既強調知識產生的科學性，亦重視反覆呈現發掘和整理知識的通則，對孕育科學頭腦與科學態度當有正面效果。



參考資料

- Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Piaget, J. (1970). The Child's Conception of Movement and Speed (trans. by Holloway G. E. T. & Mackenzie, M. J.). London: Routledge & Kegan Paul.
- 王春奎、鍾靜(2004)。〈兒童速率概念之初探研究〉。《師大學報》, 49(1), 41-64。
- 邱韻如 (2005)。速度與速率的迷思。網址:<http://memo.cgu.edu.tw/yun-ju/index.htm>。
- 陳嘉慧、張麗芬(2008)。〈幼兒距離、時間與速率概念發展之研究〉。《教育研究學報》, 42(1),33-56。
- 馮振業 (2004)。「率」的疑惑。《數學教育》19期, 42–50。(後收入吳丹 (編) (2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁11–20)。香港：香港數學教育學會。)

THANK *
YOU!