

思維實驗與教學發展： 長方體展開圖

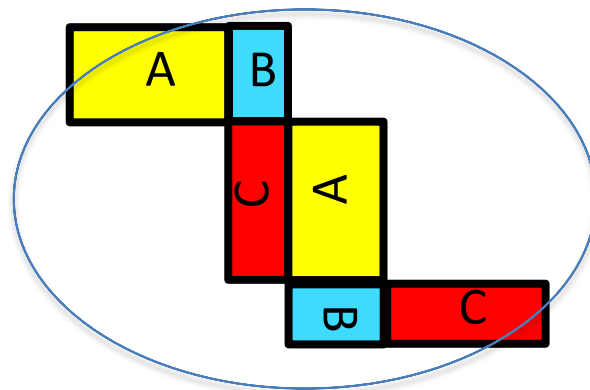
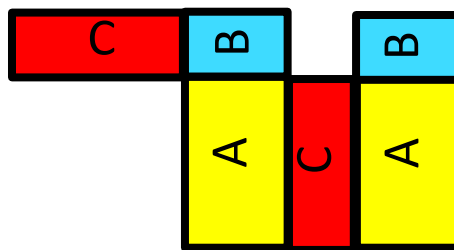
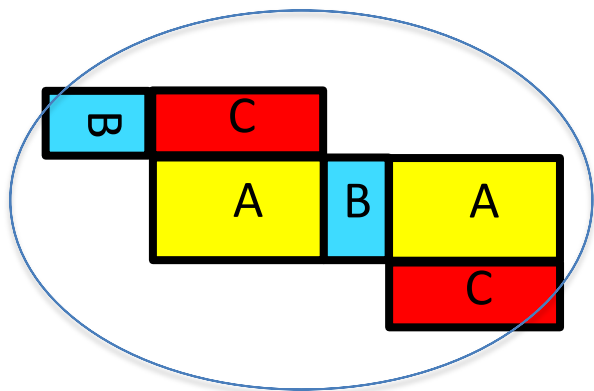
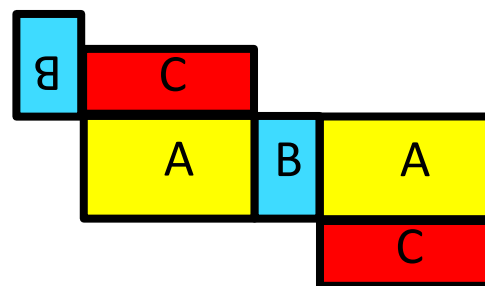
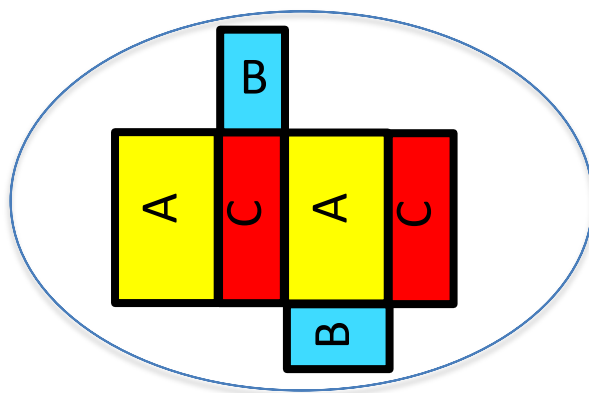
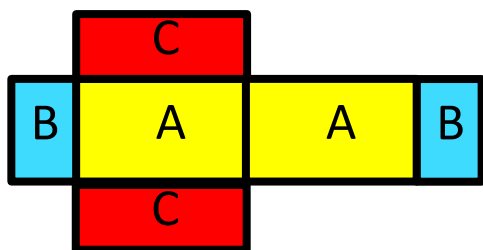
中華基督教會基法小學（油塘）黃美真

以往一般的做法：



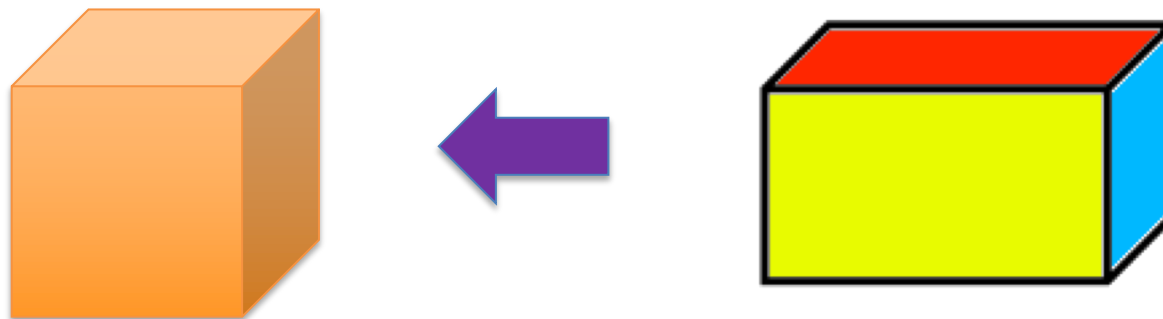
只會問學生：這個是否長方體展開圖？

不會問：你能窮盡所有的長方體展開圖嗎？



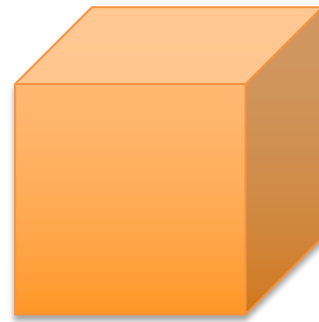
思維實驗與教學發展

- 只要有**變革**的需要，**思維實驗**就會發生
- 弗賴登塔爾指出教師可以藉著
一種**思維實驗**的手段發展**數學教育**。



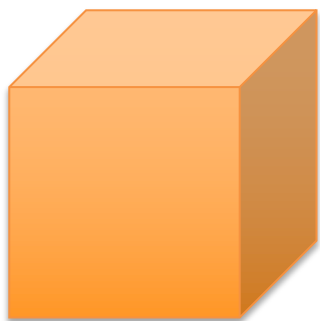
空間想像力培育

正方體展開圖 與 長方體展開圖

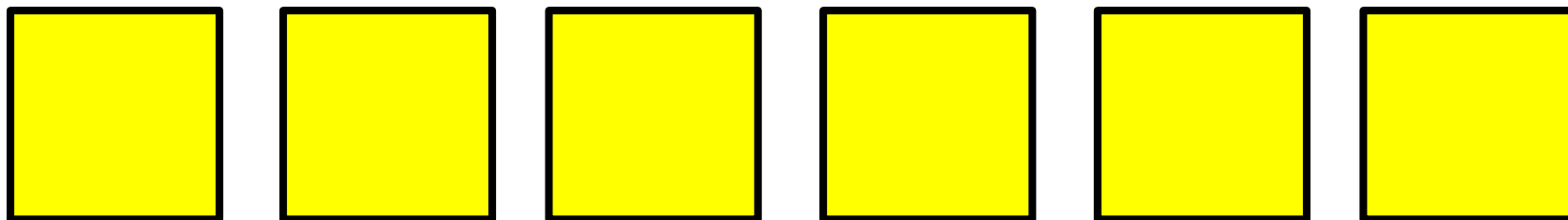


空間想像力培育

正方體展開圖數量探究活動



一共有多少款展開圖？



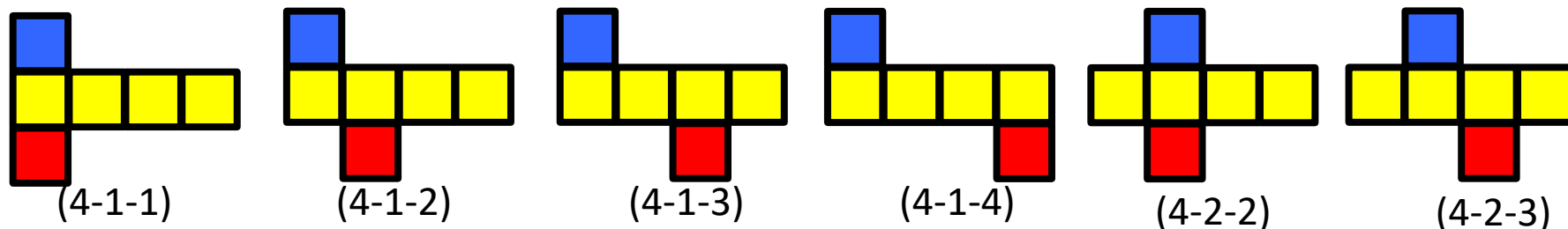
- 先讓學生利用拼板隨意拼砌
- 再問學生如何窮盡所有正方體展開圖？

探究活動的目的

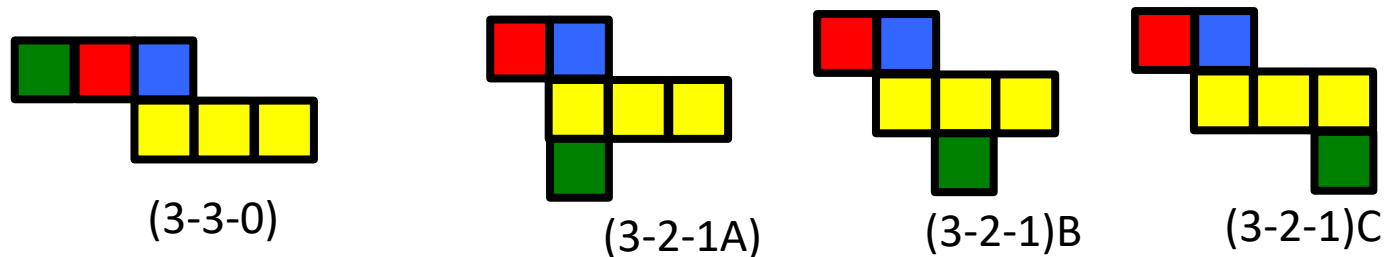
- 空間想像力の培育
- 系統探究の思維訓練

正方體展開圖數量

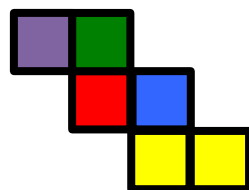
- 直線四聯方 (6 款)

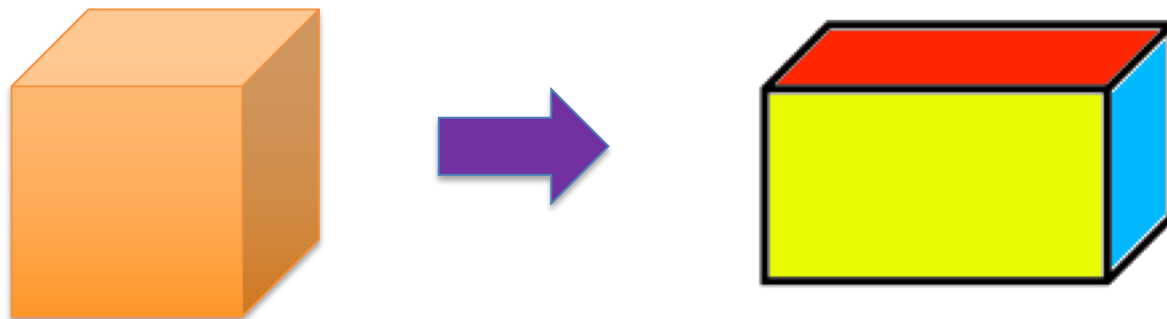


- 不含直線四聯方，只有直線三聯方 (4 款)



- 不含直線三聯方，只有直線二聯方 (1 款)





空間想像力培育

從**正方體**展開圖

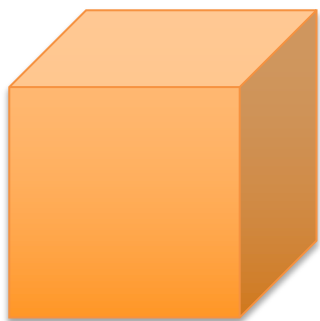
延伸到

長方體展開圖數量探究活動

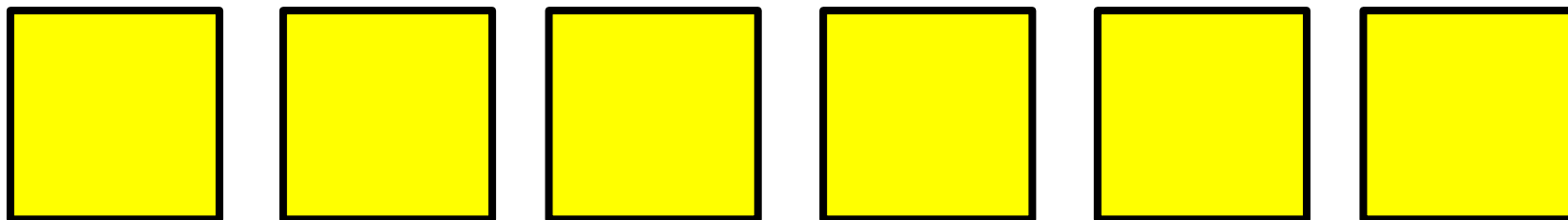
延伸背後

我們關心的是如何延續……

- 空間想像力的培育
- 系統探究的思維訓練



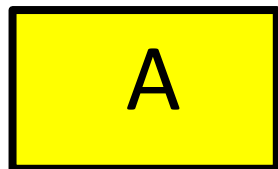
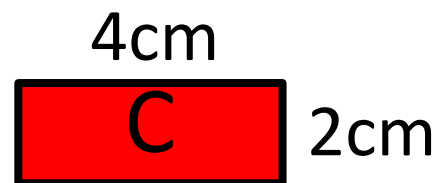
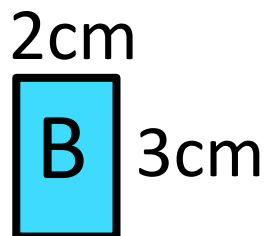
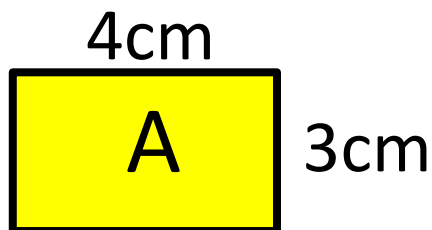
一共有多少款展開圖？



需考慮六個面有哪些不同的組合方法，
由於所有邊長相同，組合較簡單。



長、闊、高不同的長方體
一共有多少款展開圖？



除了考慮六個面有哪些不同的組合方法，還要考慮邊長等問題——太過複雜。

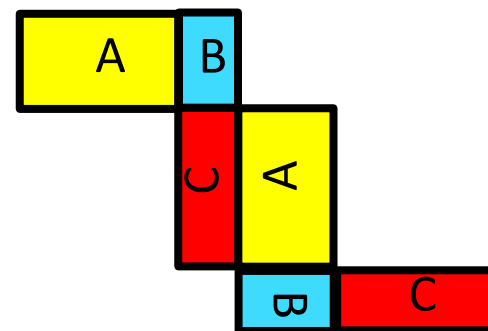
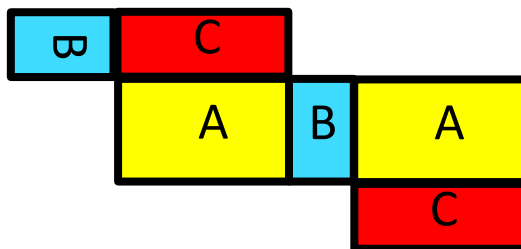
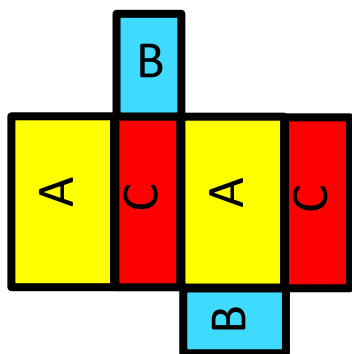
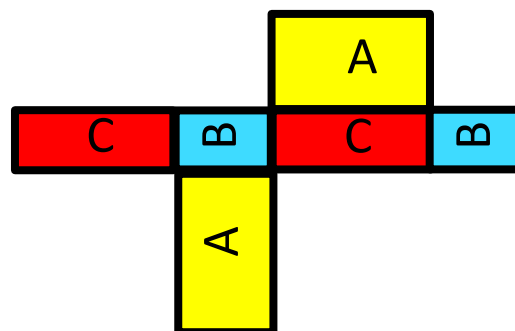
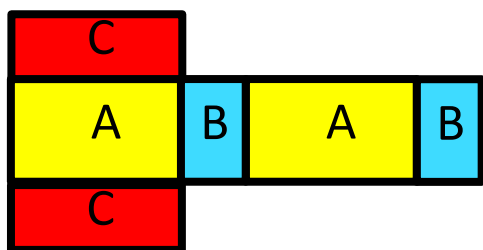


空間想像力培育

長、闊、高不同的長方體展開圖 數量探究活動

引入：

把幾個長方體沿不同的邊剪開，
得出不同的長方體展開圖。



觀察：

著學生觀察這些長方體展開圖有哪些特點：

組合：

*共有3對相同的長方形：A、B、C各一對

*它們來自長方體相對的面（不能相連）

鄰邊：

合共有三種不同的邊長，任何兩個相連的長方形面，連接的邊長度是一樣的。

熱身：

比賽：尋找所有的長方體展開圖

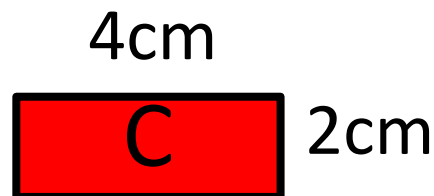
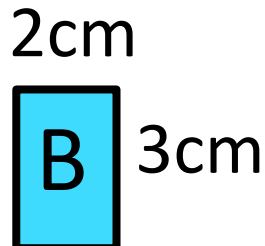
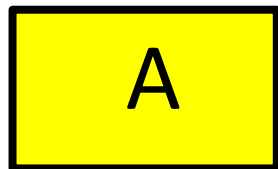
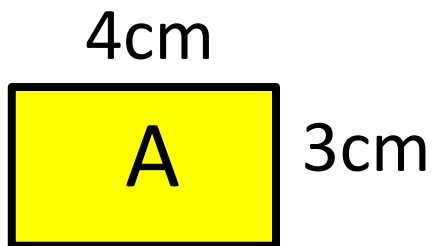
---利用方格紙，記錄（剪貼）在工作紙上。

---學生嘗試在腦中作半抽象的思考，
把紙樣畫在方格紙上，然後剪出和摺合作檢驗。

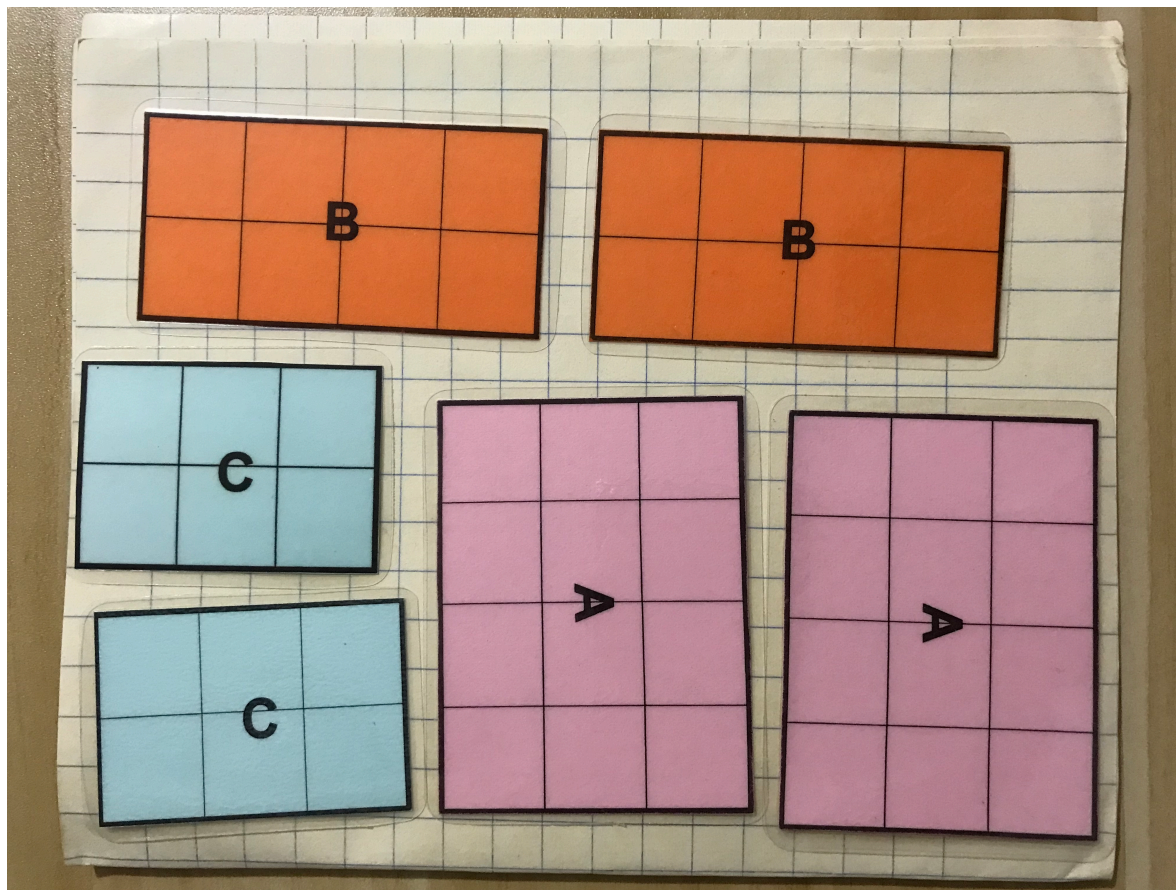
（對構思和作圖感困難的學生可利用紙拼板作輔助工具）



長4cm, 闊2cm 高3cm的長方體
一共有多少款展開圖?

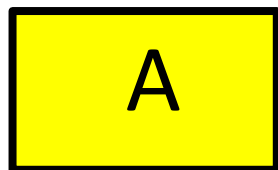
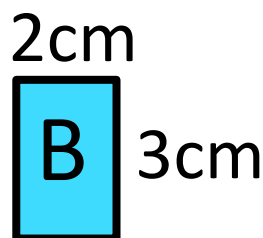
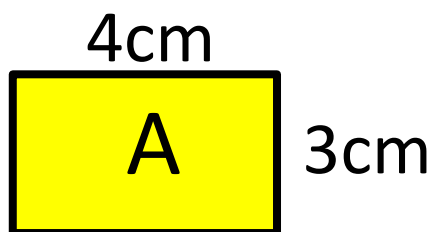


紙拼板（小錦囊）、方格紙





長4cm, 闊2cm 高3cm的長方體
一共有多少款展開圖?



- 拼砌活動前，學生估計有11款
- 拼砌活動後，學生找到的多過11款
- 問學生如何窮盡所有長方體展開圖？？？

教學活動設計

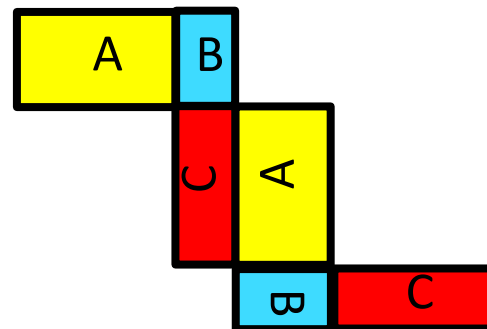
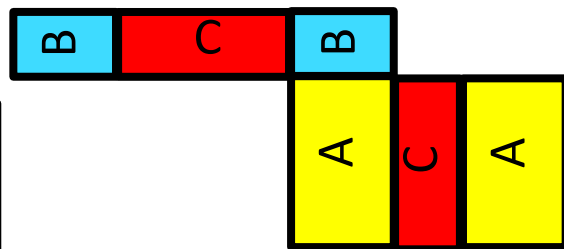
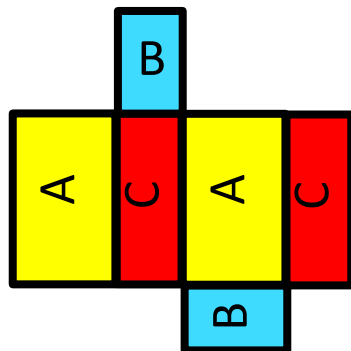
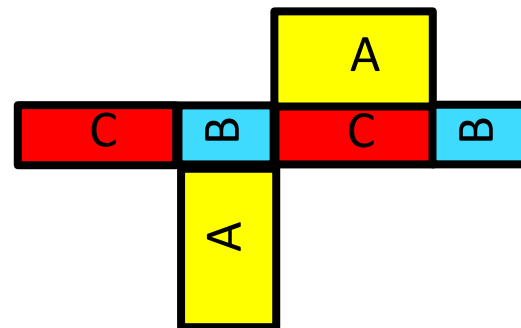
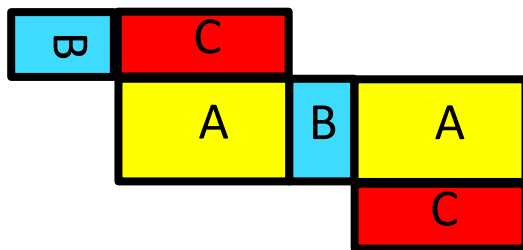
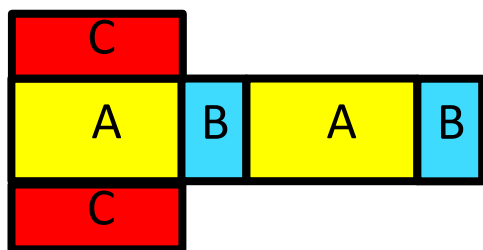
活動一：觀察長方體展開圖發現與正方體展開圖的關係

長方體展開圖的其中幾款

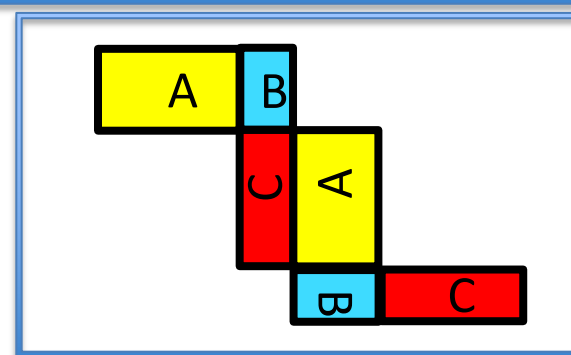
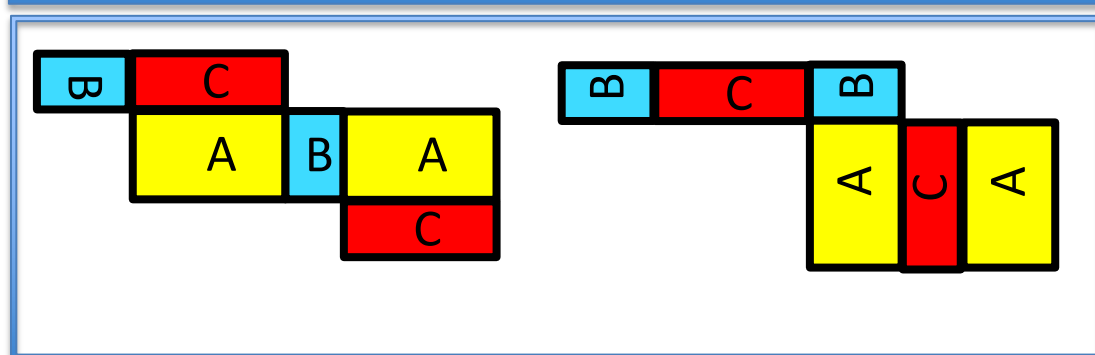
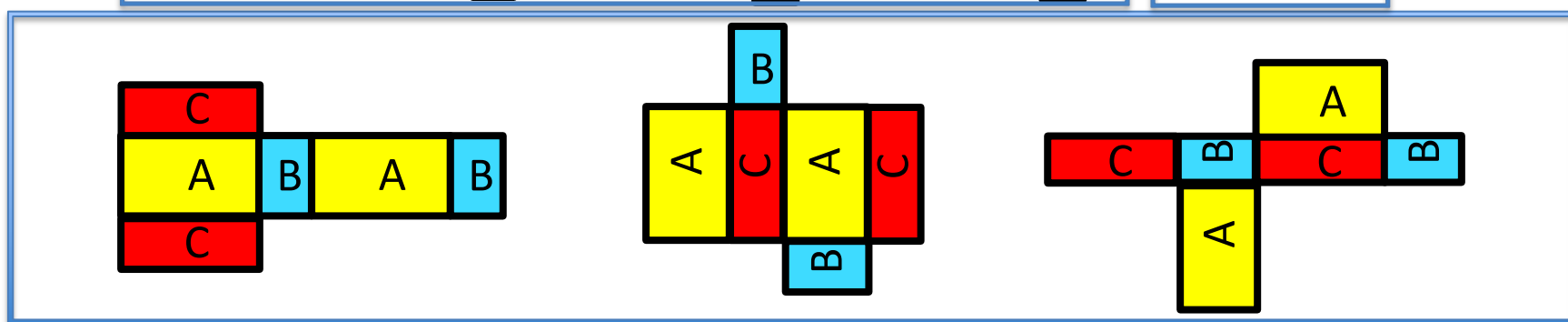
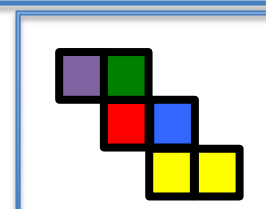
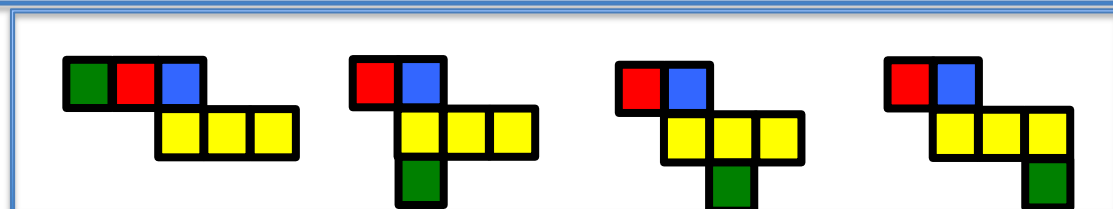
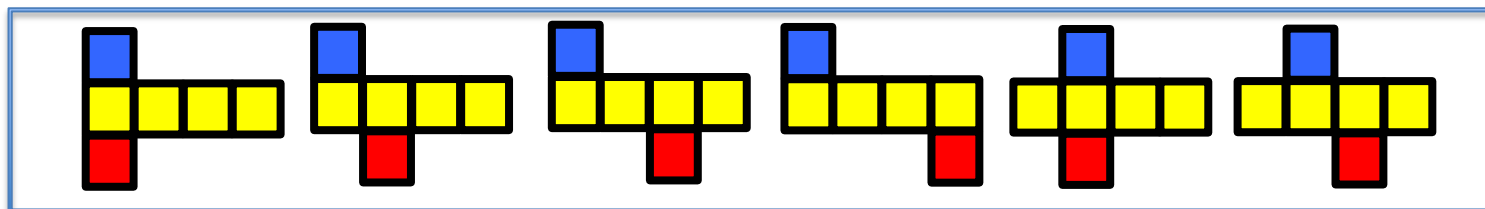


想一想：

它們的相連方式跟正方體展開圖有相似的地方嗎？



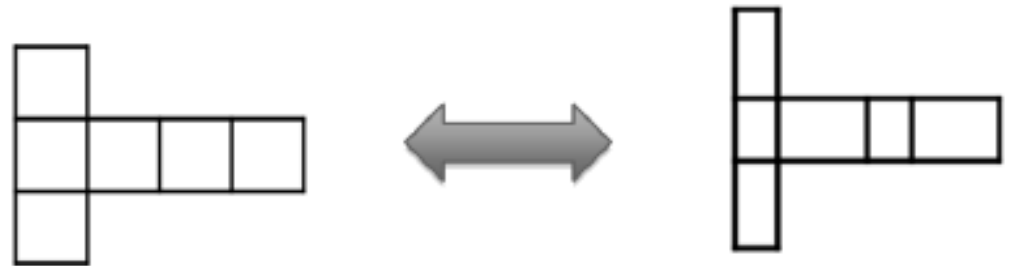
正方體與長方體 展開圖 相連方式



探究方法

- 動態的眼光：將長方體看作是被調整了邊長的正方體
- 通過調整正方形各邊的長度就可找出對應的長方體展開圖

GGB



每一款正方體展開圖，可對應多少個長方體展開圖？

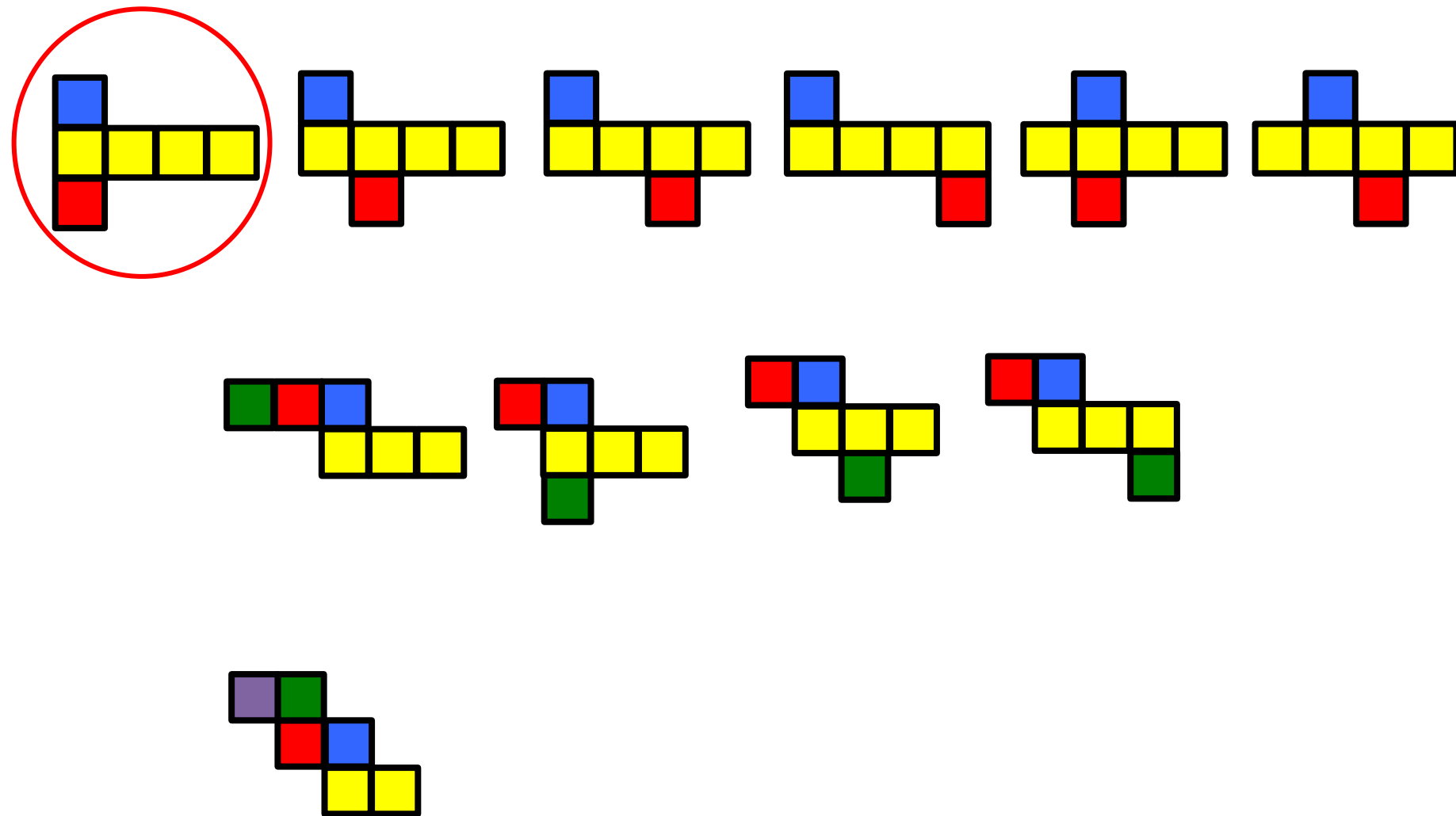
求長方體展開圖的數量便可有系統地完成，
克服了數量大所帶來的困難。

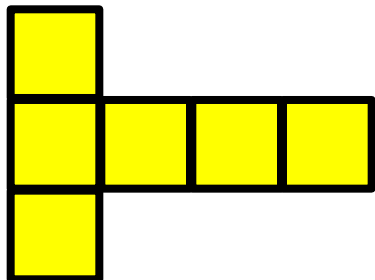
教學活動設計

活動一：觀察長方體展開圖發現與正方體展開圖的關係

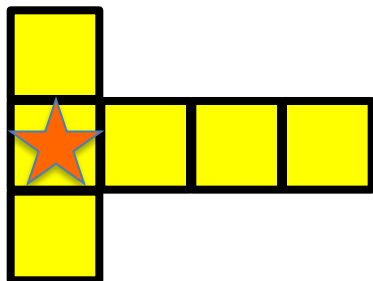
活動二：對應不同的正方體展開圖
找出對應的所有的長方體展開圖
--- 小組解難、互相檢驗、分析及討論

長、闊、高不同的長方體展開圖的數量

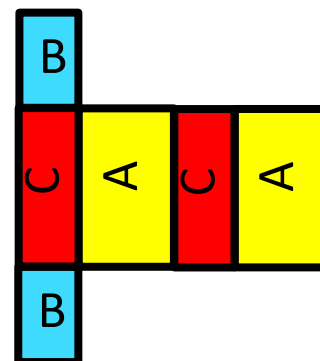
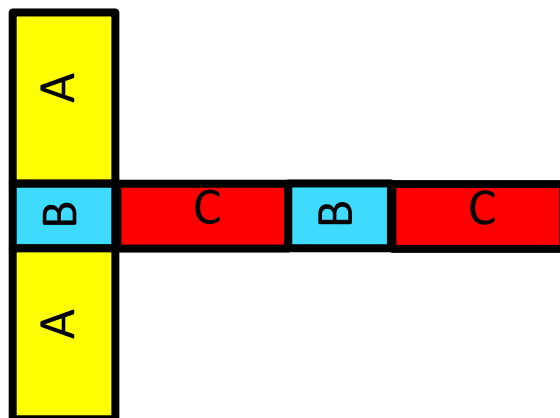
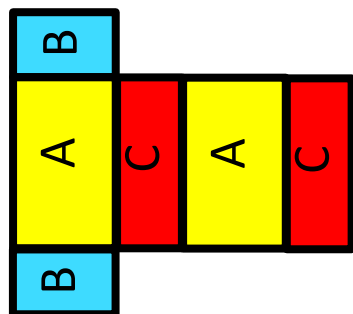
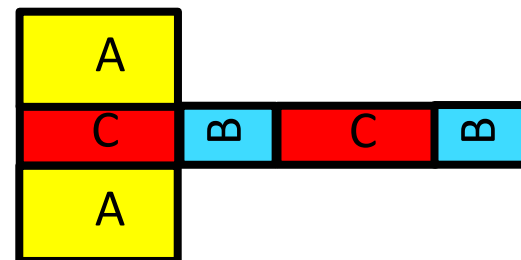
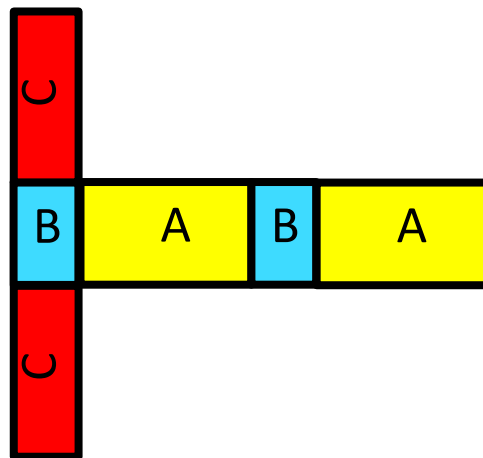
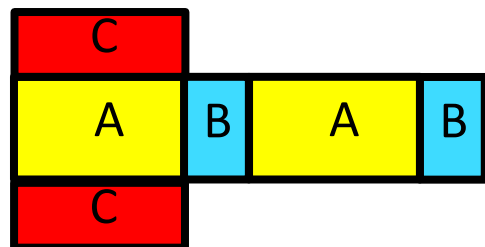




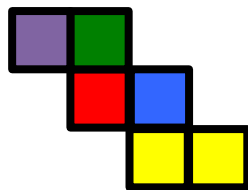
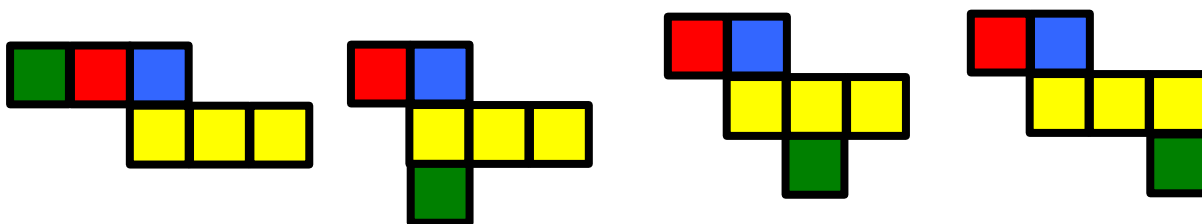
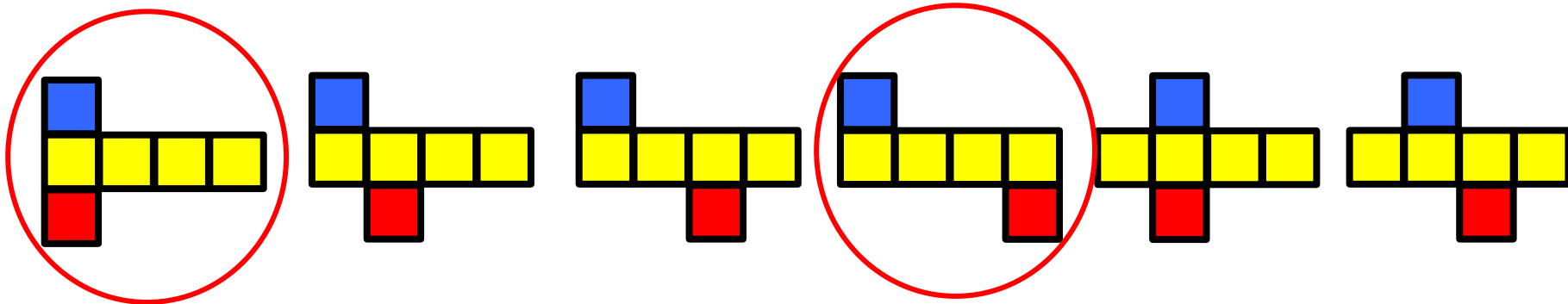
對應多少款長方體展開圖？



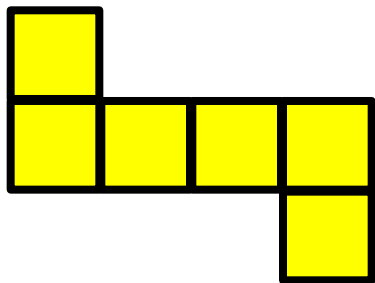
對應多少款長方體展開圖？



長、闊、高不同的長方體展開圖的數量

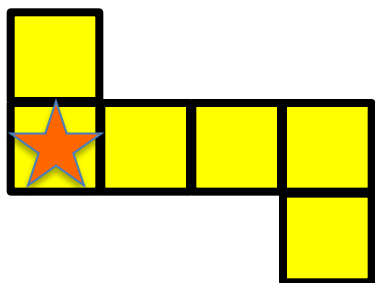


推測： $6 \times 11 = 66$ （款）??

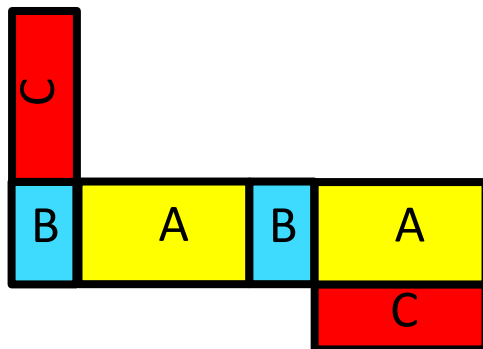
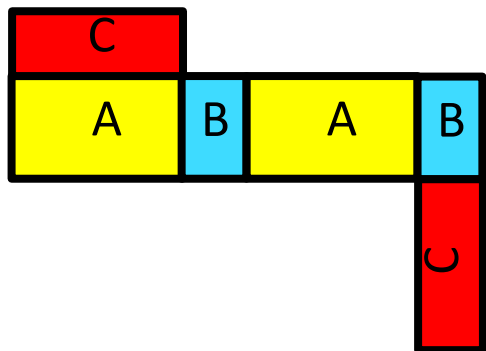


對應多少款長方體展開圖？

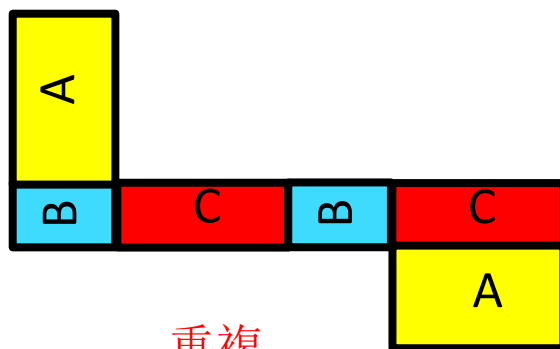
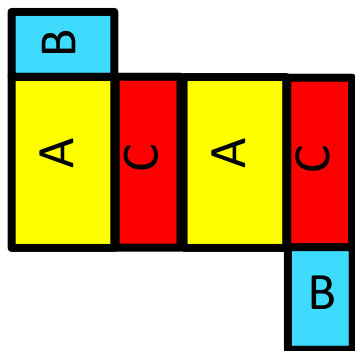
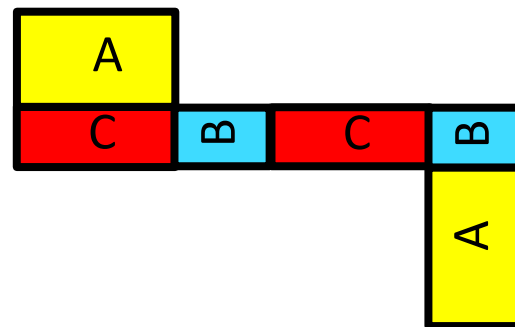




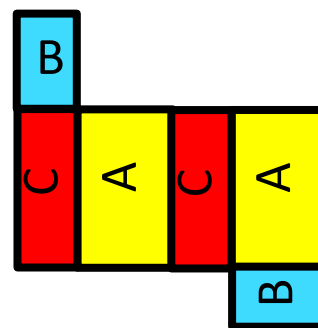
對應多少款長方體展開圖？



重複

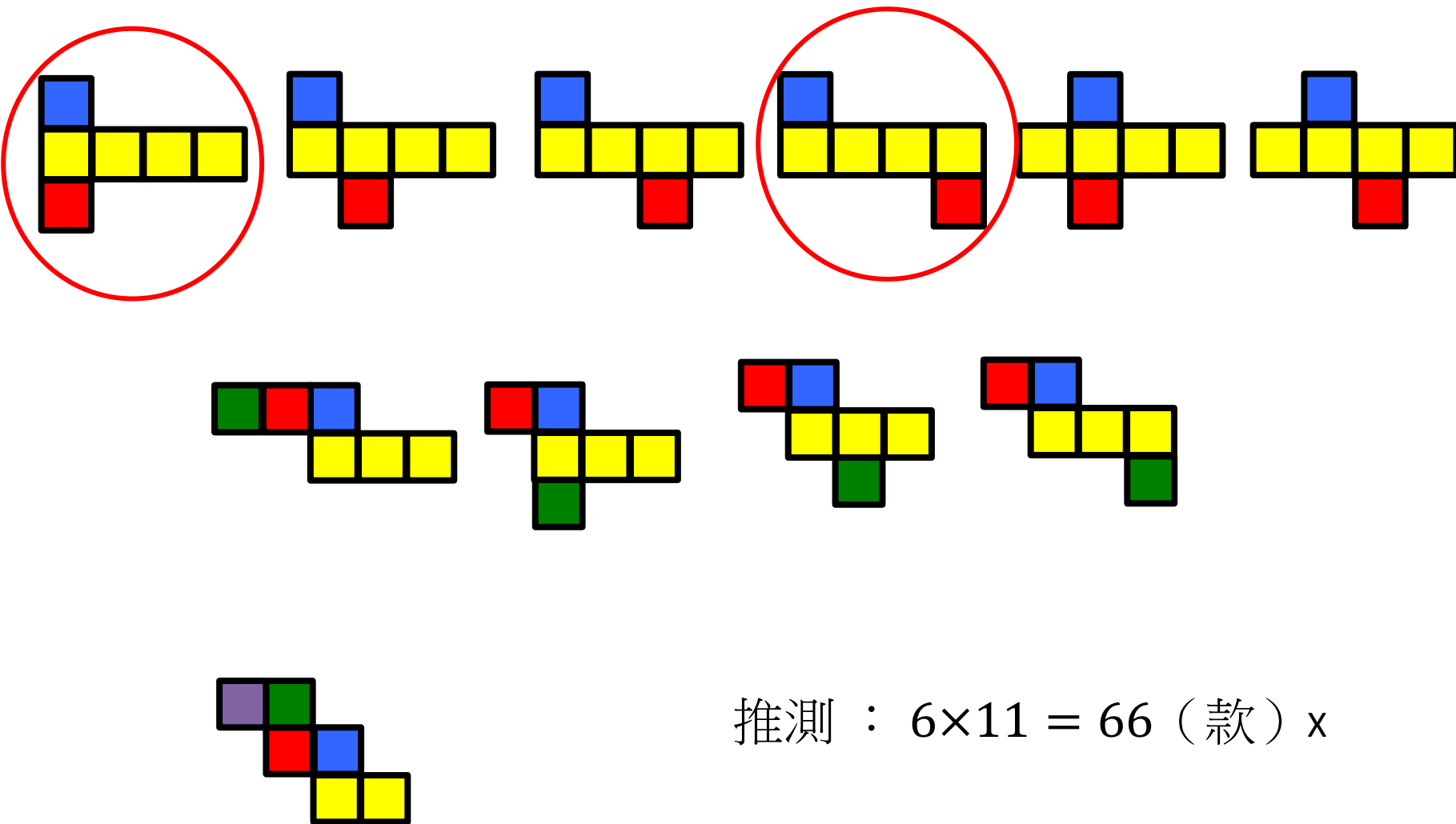


重複



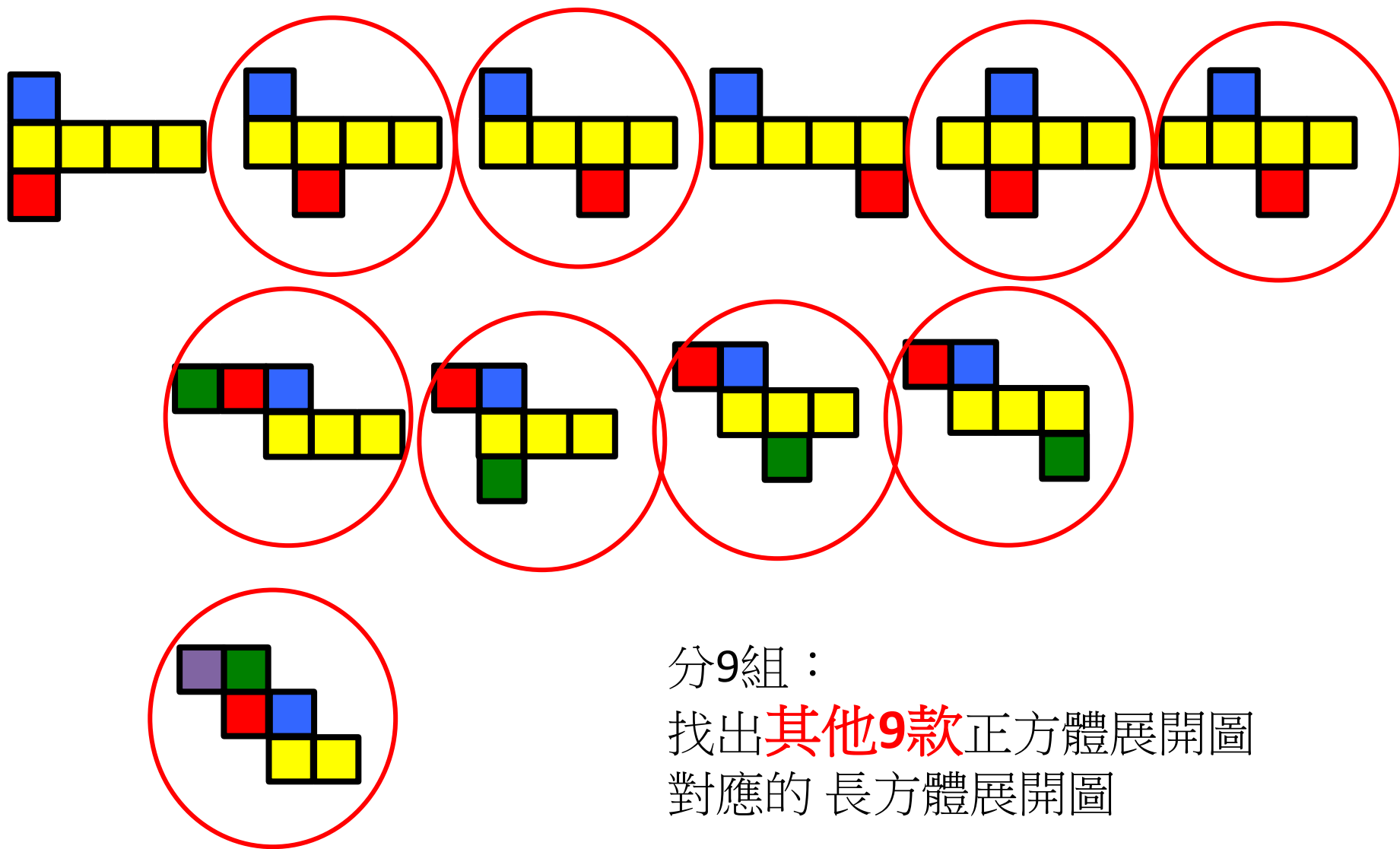
重複

長、闊、高不同的長方體展開圖的數量



推測： $6 \times 11 = 66$ (款) x

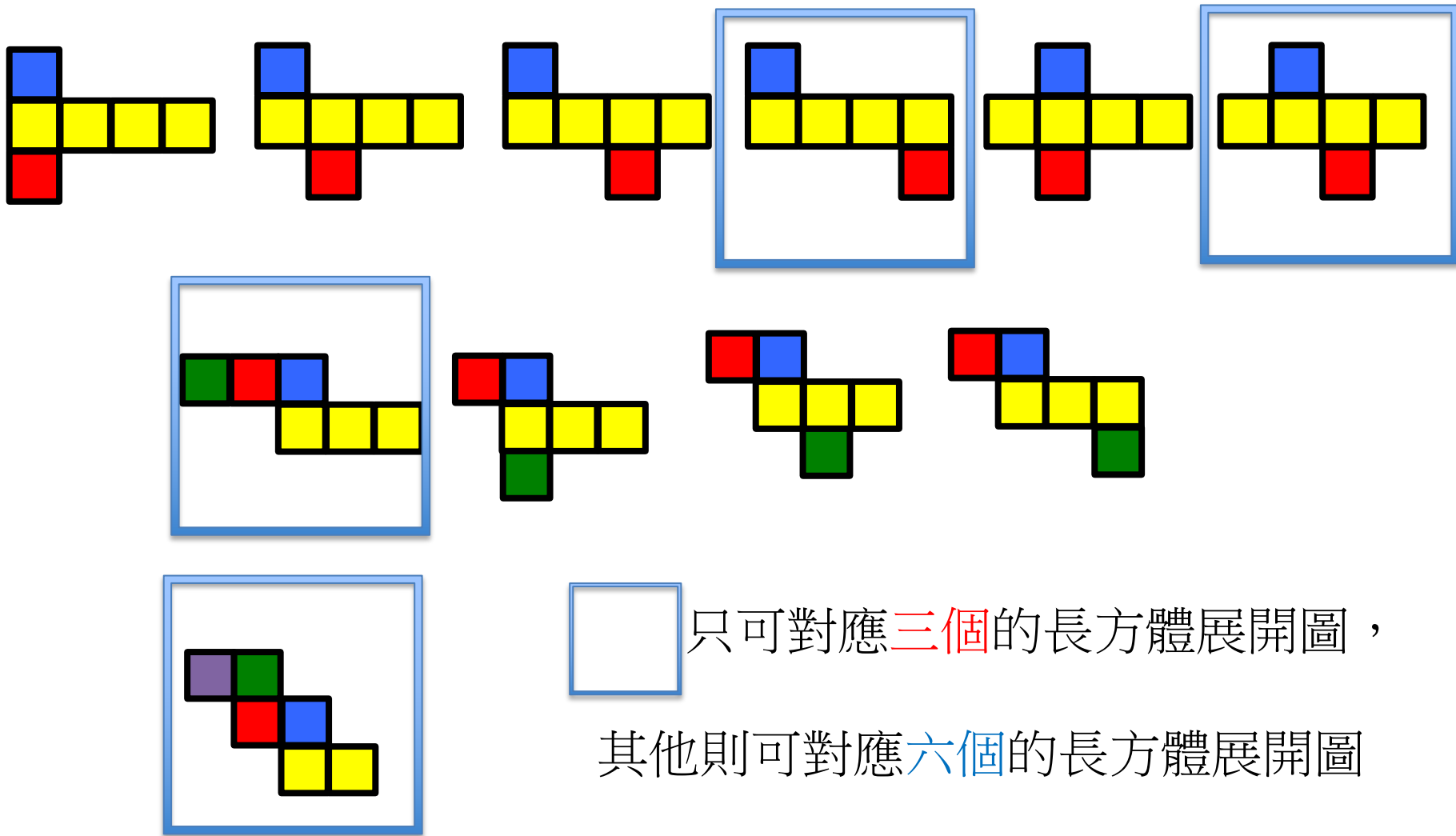
長、闊、高不同的長方體展開圖的數量



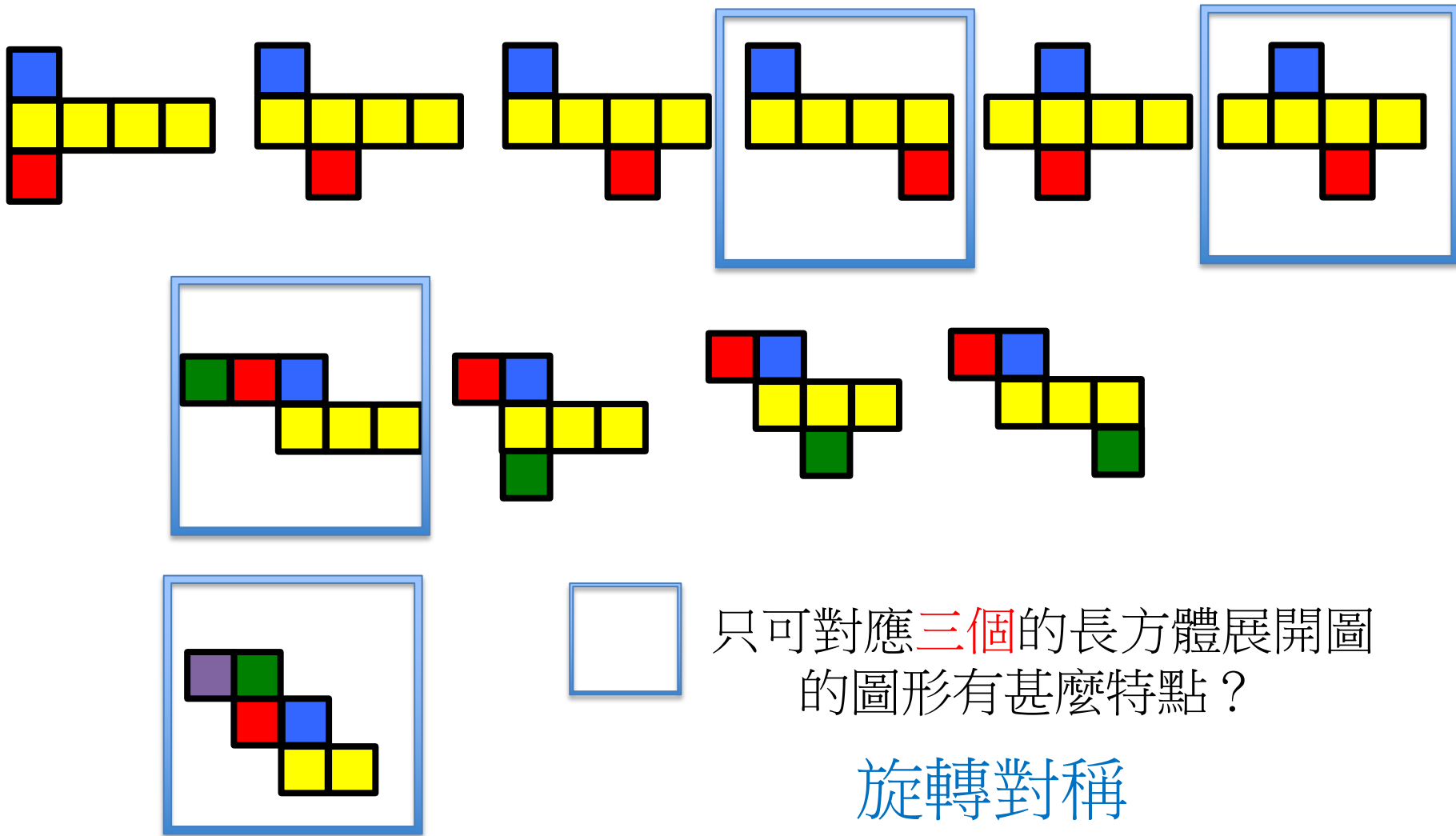
分9組：

找出**其他9款**正方體展開圖
對應的 長方體展開圖

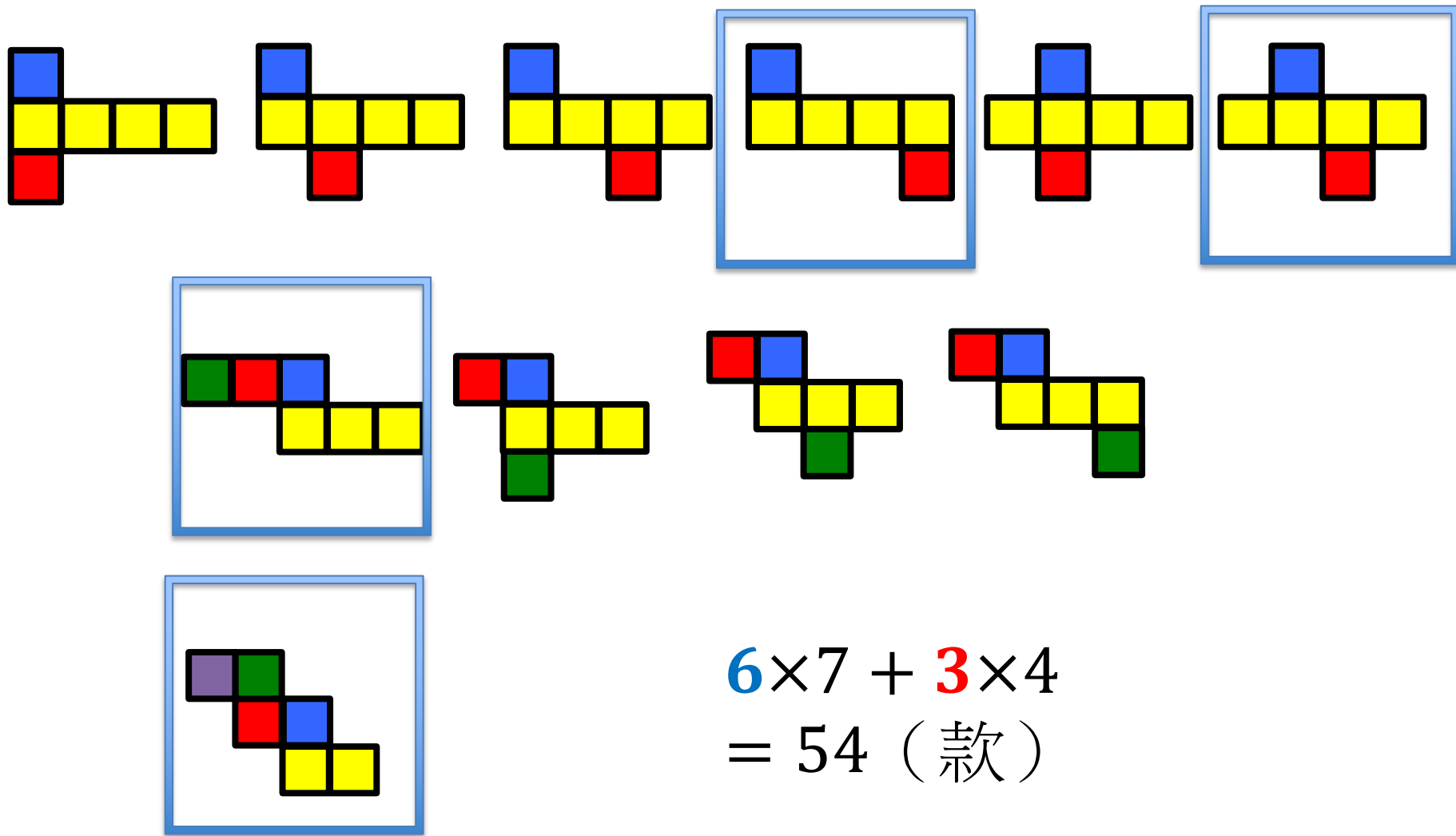
長、闊、高不同的長方體展開圖的數量



長、闊、高不同的長方體展開圖的數量



長、闊、高不同的長方體展開圖的數量



$$6 \times 7 + 3 \times 4 = 54 \text{ (款)}$$

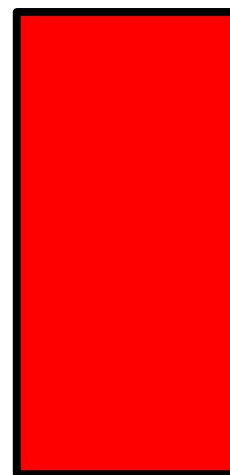
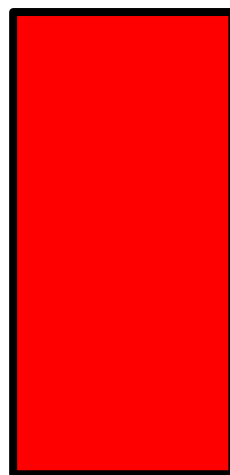
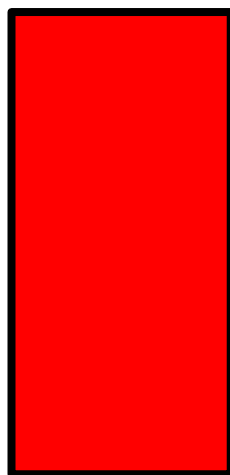
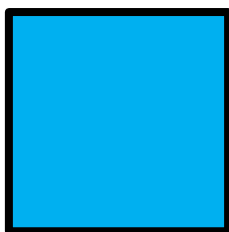
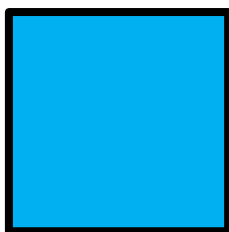
延伸活動：兩個面是正方形的 長方體展開圖數量探究

空間想像力培育





一共有多少款展開圖？

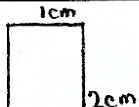
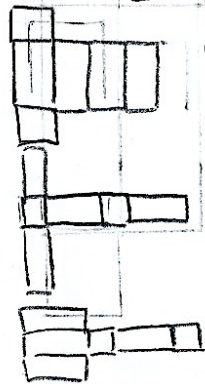


延伸活動：找出有兩個面是正方形的長方體展開圖數量

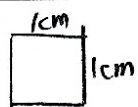
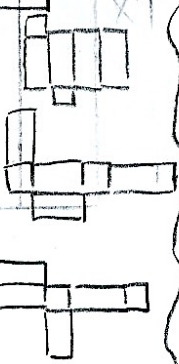
一個長方體是由 4 個相同的長方形和 2 個相同的正方形圍成，
它有多少個不同的長方體展開圖？

我的思路：

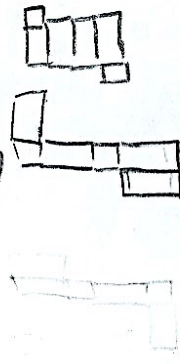
No.1 (3個)



No.2 (3個)



No.3 (2個)



從上話有 7 款可以對應到 8 款，有 1 款可以對應到 3 款，對應到 3 款的其中一個例子，如四聯方體，同一個四聯方體的 1、4 兩板有 1 個用別邊條式計算。

如此難推

對應到 8 個的有 7 款，對應到 2 個的有 4 款

對應 款式 對應 款式

$$3 \times 7 + 2 \times 4$$

$$= 21 + 8$$

$$= 29 \text{ (款)}$$

縮小版

答案：29 (款)

一個長方體是由 4 個相同的長方形和 2 個相同的正方形圍成，
它有多少個不同的長方體展開圖？

我的思路：

上一次找到共有 54 個長方體展開圖，分別有 7 種正方體展開圖各能對應 6 款長方體展開圖；有 4 種正方體展開圖各能對應 3 款長方體展開圖。根據以上資料，結果如下：

① 可對應 6 款展開圖的正方體展開圖每個能對應 3 個題目所述的長方體的展開圖。∴ 共有 7 種
∴ 有展開圖：7 × 3 = 21 (個)

② 可對應 3 款展開圖的正方體展開圖每個能對應 2 個題目所述的長方體的展開圖。∴ 共有 4 種
∴ 有展開圖：4 × 2 = 8 (個)

③ 共有題目所述的長方體的展開圖：21 + 8 = 29 (個)

答案：29 (個)

探究活動的目的

- 以探究活動作為**培育空間想像力**的載體
 - 最關心的是空間想像力提升的過程，
而不是他們能說出或記住多少款展開圖
- 必須有**系統的探究辨證**，避免重覆或遺漏
 - 讓學生感受嚴密的數學探究過程

空間想像力

在動腦**猜想**和動手操作的**反覆驗證**中形成。

我們關心的是：

- 如何讓學生浸淫在這個猜想和反覆驗證的過程中？
- 如何讓隱蔽性的空間想像活動有可觀測的顯性行為表徵？
- 如何照顧學生在空間想像力方面的差異？



中華基督教會基法小學（油塘）
數學科《長方體展開圖探究》工作紙（二）

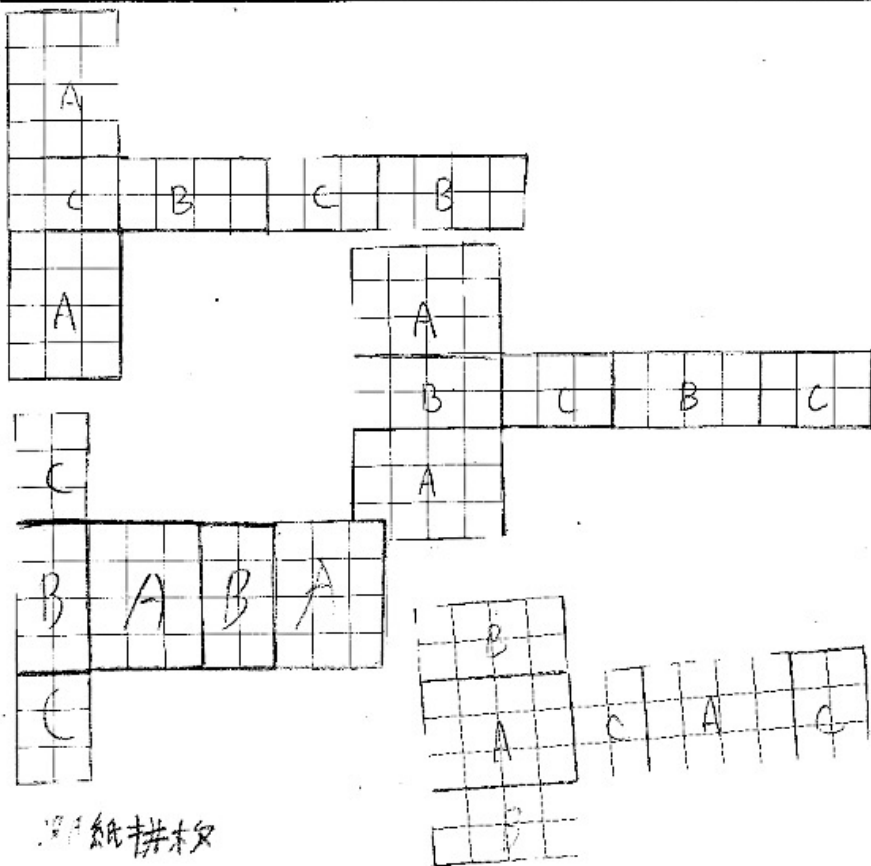
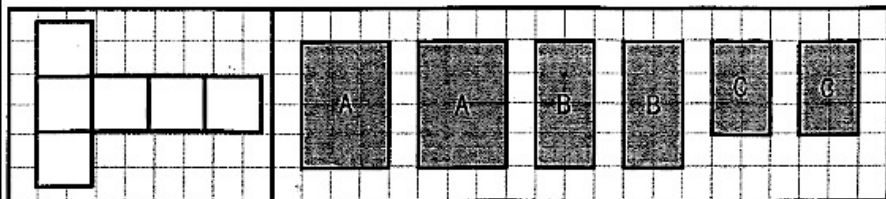
五年級 A 班

日期：

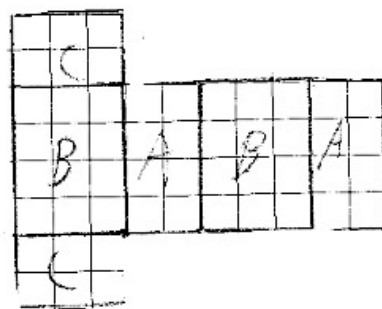
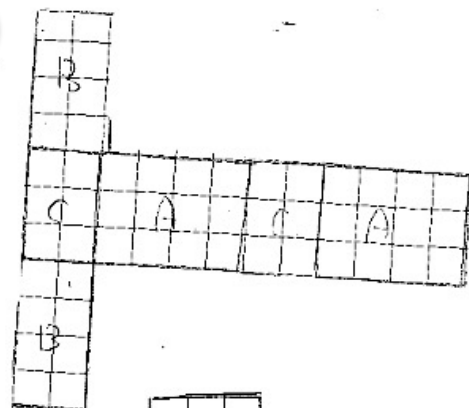
組員：

不需紙拼板

下圖是正方體展開圖的其中一款，試尋找與它對應的所有長方體（ $4\text{cm} \times 3\text{cm} \times 2\text{cm}$ ）展開圖，並剪貼在工作紙上。圖形不可重複，且擺放的方向要與指定的正方體展開圖一樣。



不需紙拼板



思維實驗

教學活動設計

〉從誕生、受阻、改良、到最後步入成熟

所經歷的思維實驗過程

教學活動設計

活動一：觀察長方體展開圖發現與正方體展開圖的關係

活動二：對應不同的正方體展開圖找出對應的所有的長方體展開圖

--- 小組解難、互相檢驗、分析及討論

改良教學活動設計

熱身賽：找出不同的長方體展開圖
(瞭解六個面之間拼砌的條件與技巧)
(提供佈有網格的紙拼版，以顯示長度)

活動一：觀察長方體展開圖發現與正方體展開圖的關係

活動二：對應不同的正方體展開圖
找出對應的所有的長方體展開圖
--- 小組解難、互相檢驗、分析及討論

提高課堂效率

- 所有紙拼板都布有網格（顯示長度）
- 兩人一組，一人用方格紙繪畫，另一人剪下檢驗並貼在工作紙上
- 統一方向，方便核對。
- 提供“錦囊”，照顧學習差異（逐步擺脫對實物的依賴）

參考資料

- 馮振業、葉嘉慧（2004）。數學化教學：空間觀念的培養。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）。《香港數學教育會議—2004論文集》（頁89-96）。香港大學教育學院。（後收入吳丹（編）（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》（頁188-199）。香港：香港數學教育學會。）
- 汪滌塵、馮振業、黃美真（2012）。思維實驗—長方體展開圖教學設計之旅。《數學教育》33期，34—46。（後收入葉治浩（編）（2015）。《小學數學教育文集2015：決心與智慧的展現》（頁153-165）。香港：香港數學教育學會。）