

數學化與再創造

劉秀惠

上水惠州公立學校

「數學化」是甚麼？

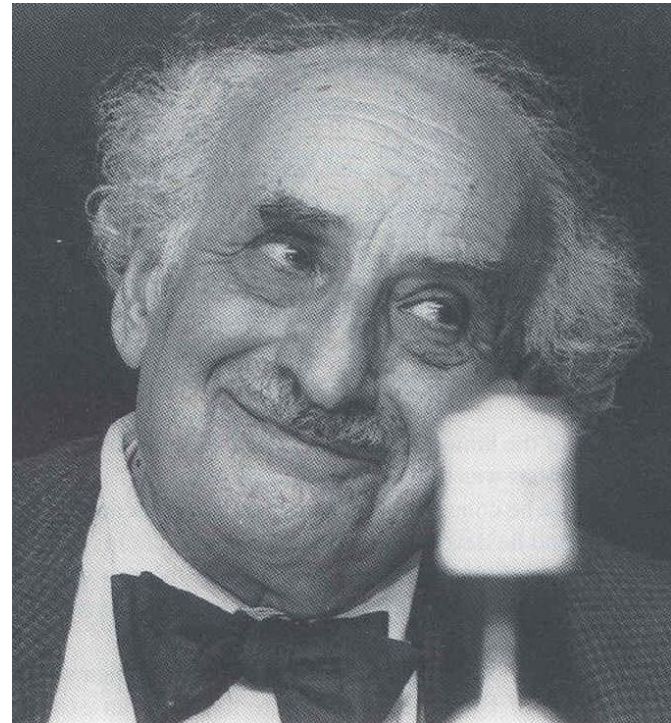
已故荷蘭數學教育家

Freudenthal (1973) 提出以

「數學化」(Mathematising)

觀點組織數學的學習及其

教學。



弗賴登塔爾

Hans Freudenthal
1905-1990

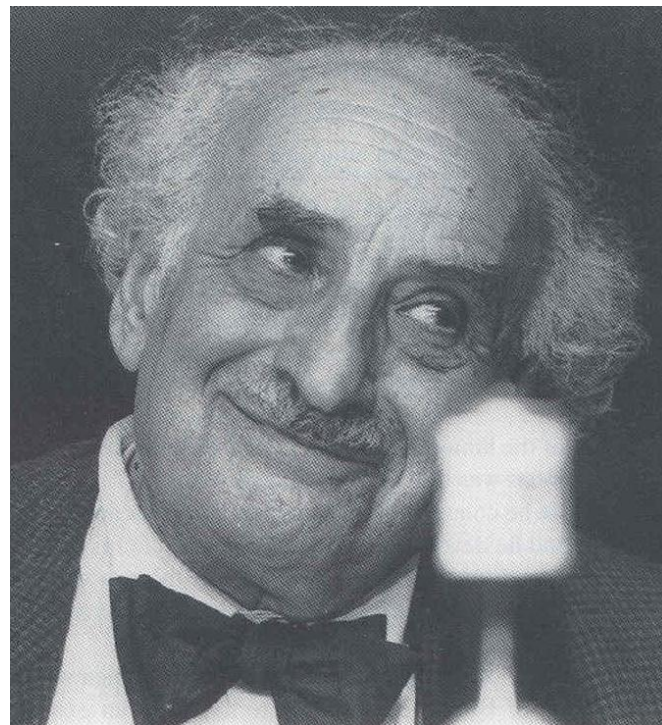
「數學化」是甚麼？

簡略而言，「數學化」就是數學產物由無到有，由粗疏變精密的過程。

學數學，就是參與數學產物再創造（reinvention）的過程。

「數學化」是甚麼？

在Freudenthal看來，數學產物只對少數人有意義，而數學教育作為一門對所有人的工作，必須重視「數學化」過程。



弗賴登塔爾

Hans Freudenthal
1905-1990

「再創造」是甚麼？

Children should repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past had known a bit more of what we know now.

現今資訊發達，學生已不需如前人般經歷
「艱巨」的數學產物創造過程。

「再創造」是甚麼？

guiding reinvention means striking a subtle balance between the freedom of inventing and the force of guiding, between allowing the learner to please himself and asking him to please the teacher.

「再創造」的過程是經過精心策劃的，在學習者的自主性與教學者的指導性間取得平衡。

橫向數學化與縱向數學化

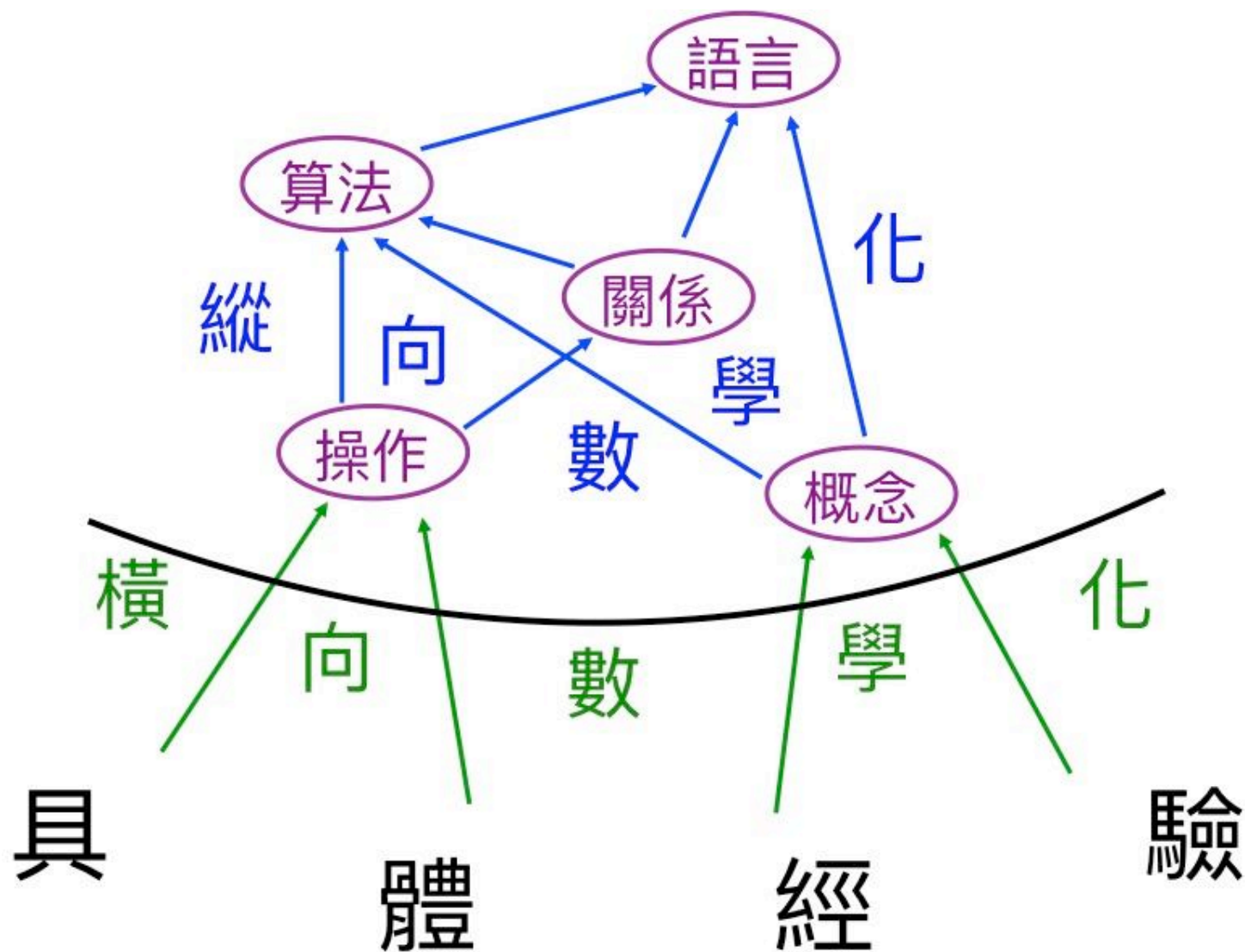
「橫向數學化」

由生活具體經驗入手，衍生數學概念和關係

「縱向數學化」

由已建立的數學知識入手，衍生進一步的數學概念、關係和原理。

橫向數學化與縱向數學化



反映數學知識產生的過程！

如何製訂適切的學習軌道

「橫向數學化」

由生活具體經驗入手，衍生數學概念和關係

✓ 小一長度和距離

數學知識呈現的形態和過程

小一長度和距離

- ✓ 按脈絡「直接比較」→「間接比較」→「自訂單位」→「公認單位」→「量感培養」編排教學，令學生的數學知識由粗疏走向精密
- ✓ 與其他度量課題的知識呈現過程一致，讓學習收舉一反三之效

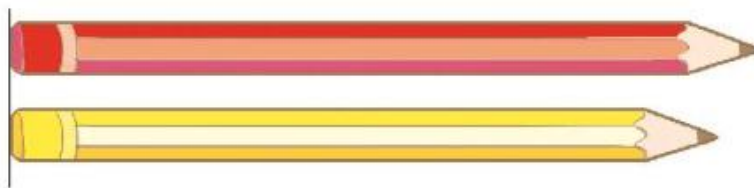
量化工作的演進軌道

直接比較

在不涉第三種事物的情況下，測定事物A與事物B，哪個具有較多（高）特質X



我們要把物件的**其中一端對齊**來比較它們的長短。



- ❶ 紅色鉛筆**比**黃色鉛筆（長 / 短），
- ❷ 黃色鉛筆**比**紅色鉛筆（長 / 短）。

直接比較

直接比較

量化工作的演進軌道

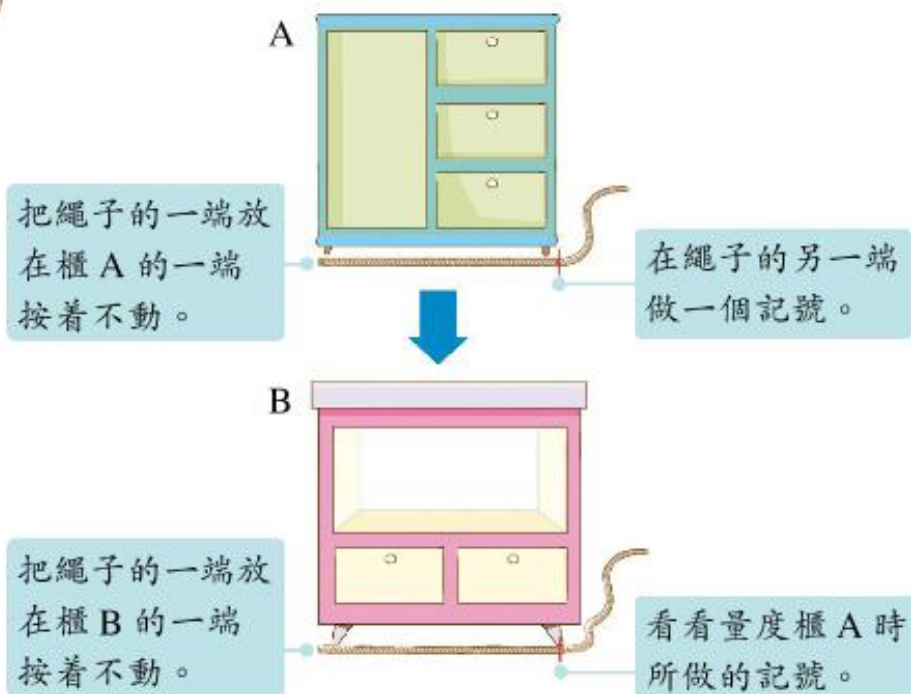
間接比較

在借助第三種事物的情況下，測定事物A
與事物B，哪個具有較多（高）特質X

物件不能搬移，即不能把其中一端對齊，
該怎樣做呢？



可以用繩子作「中間人」來幫助比較。



櫃 A 比櫃 B (長 / 短)，櫃 B 比櫃 A (長 / 短)。

間接比較

量化工作的演進軌道

運用單位量度

選擇事物U作為參考對象（量度單位），然後測定其他事物具有特質X的程度，是事物U的多少倍

* 單位愈小，描述事物的精確度愈高

自訂單位的選擇

✓ 穩定

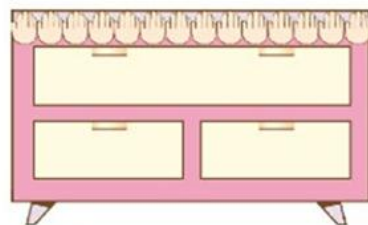
✓ 易於操作

✓ 容易得到（隨身：永備尺）

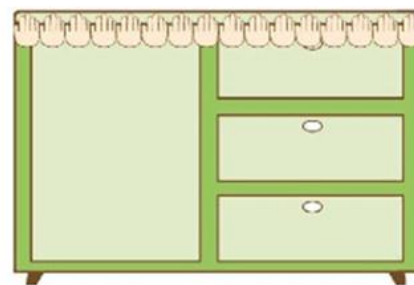
量化工作的演進軌道

自訂單位

選擇的參考對象（量度單位）來自個人喜好，並未被廣泛應用



A



B

櫃子 A 長約 個 手。

櫃子 B 長約 個 手。

櫃子 A 比櫃子 B（長 / 短），

櫃子 B 比櫃子 A（長 / 短）。

運用自訂單位的量度

運用自訂單位的量度

運用自訂單位的量度

公認單位

- ✓ 小明說他的玩具槍長12枚曲別針，你可以掌握這玩具槍有多長嗎？
- ✓ 自訂單位的缺點在於無法有效地與別人溝通！
- ✓ 運用公認單位的好處在於能有效地傳意

量化工作的演進軌道

公認單位

選擇的參考對象（量度單位）已被廣泛應用

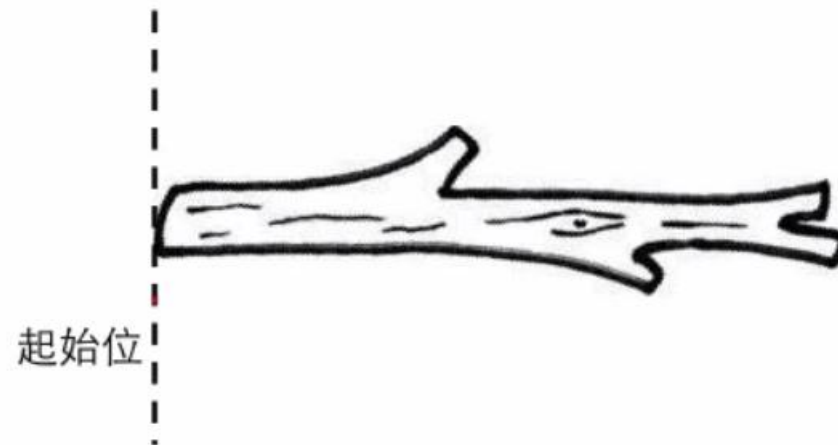


用相同的單位使量度或比較物件的長度更方便和準確。

「厘米 (cm)」是其中一個量度長度的公認單位。
以下的長度是「1 厘米」，又可寫作「1 cm」。

1 厘米

以厘米為單位量度長度



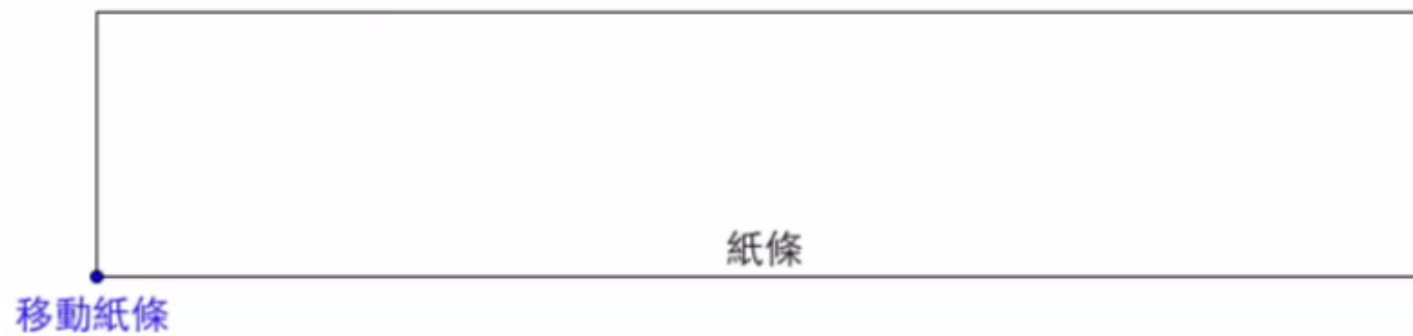
1 厘米

排厘米



製作量尺

□ 畫起始位



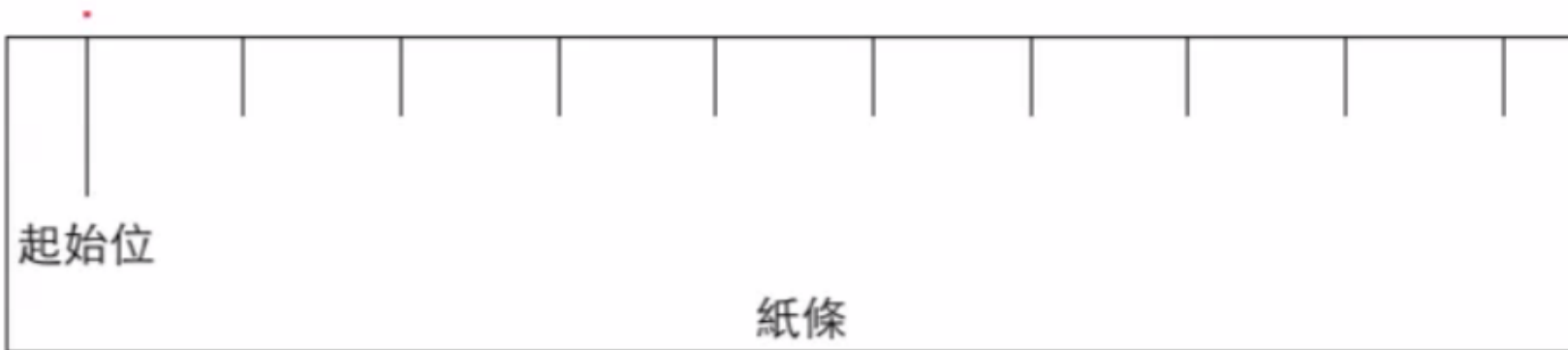
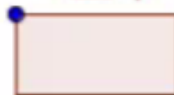
製作量尺

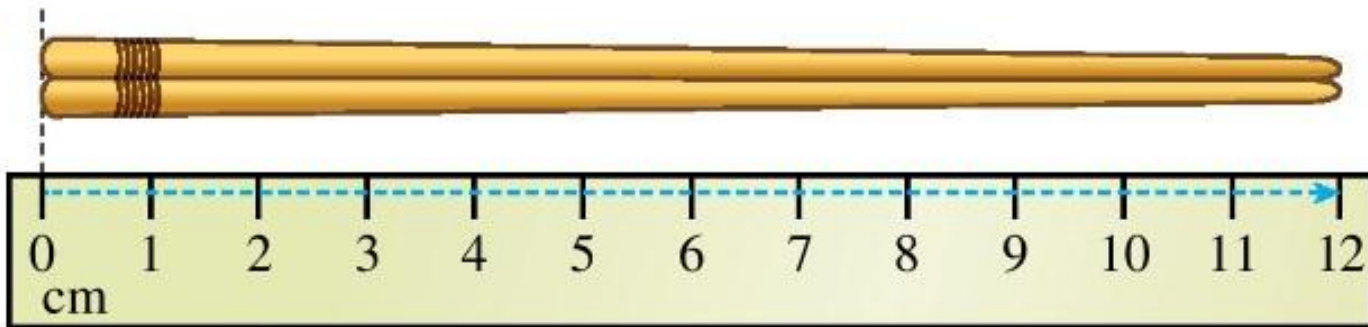
改進量尺

標示刻度

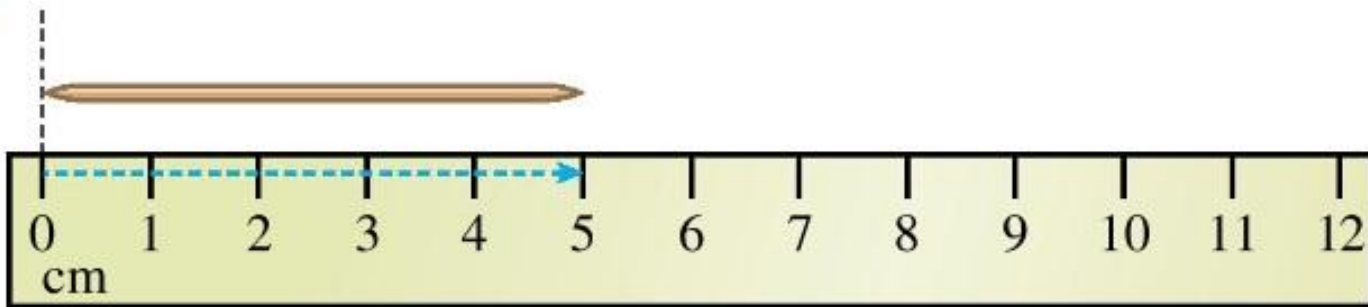


1厘米





筷子長 _____。



牙籤長 _____。

量感的培養

✓ 先猜後量

✓ 剪出指定長度的繩子

如何製訂適切的學習軌道

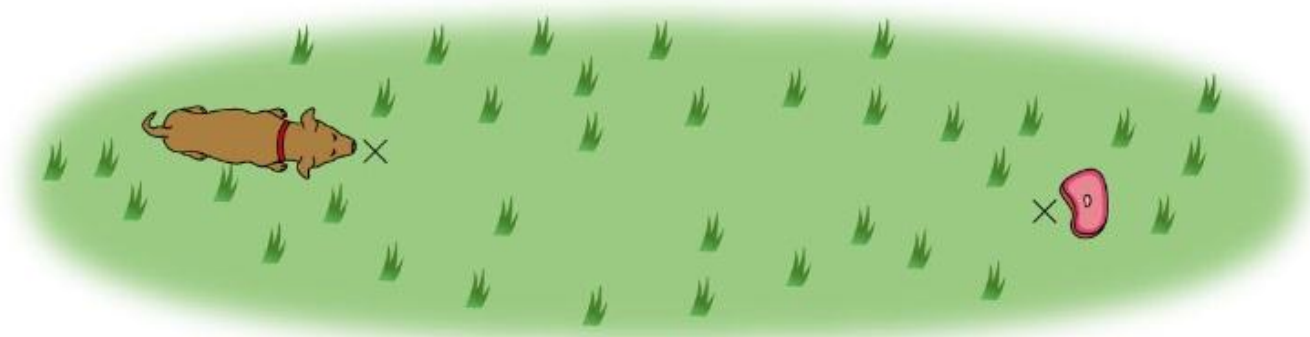
「縱向數學化」

由已建立的數學知識入手，衍生進一步的數學概念、關係和原理。

- ✓ 點到點的距離
- ✓ 點與直線的距離
- ✓ 平行線檢測法

點到點的距離

小黃狗正餓得發慌，忽然看見草坪的另一端有一塊肉。
請畫出小黃狗跑往肉塊的最短路線。

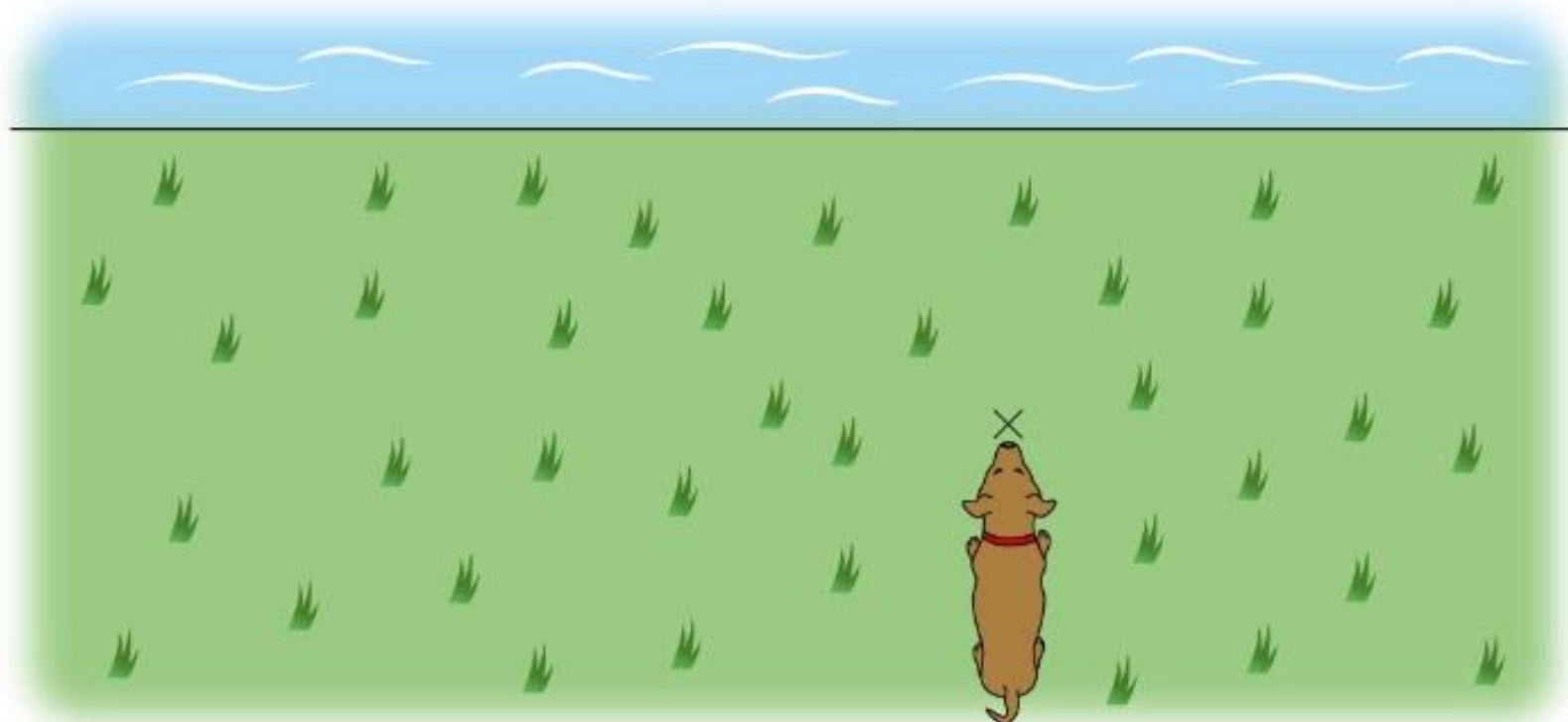


小黃狗跑往肉塊的最短路線，就是連接兩點的一條_____。

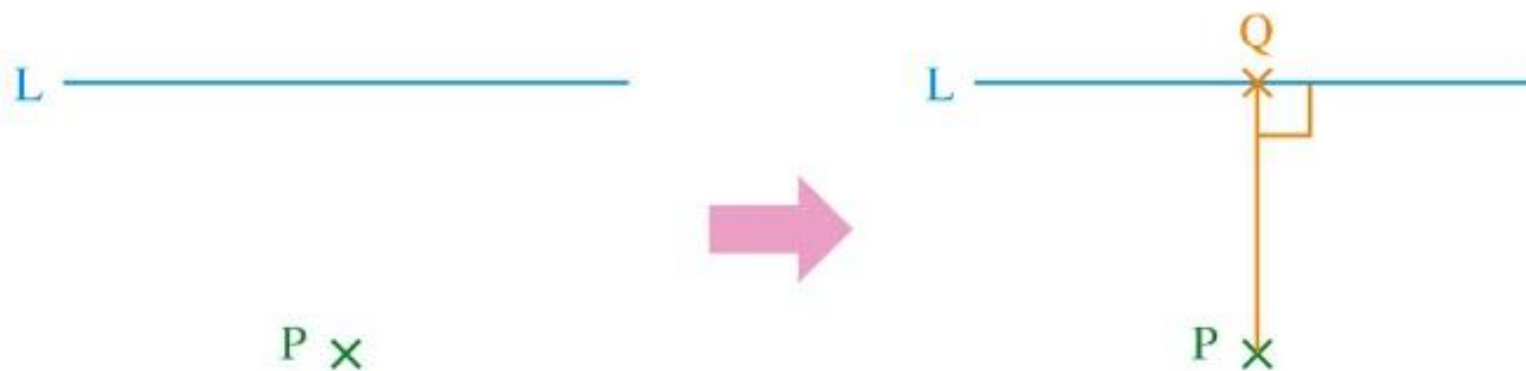
兩點之間，最短的路線是連接它們的直線。
這段直線的長度，就是兩點間的距離。

點到直線的距離

吃了肉塊後的小黃狗覺得口渴，要跑到河邊喝水，想一想小黃狗跑到河邊的**最短路線**是怎樣的。



點到直線的距離



從 **P** 點畫一條與**直線 L** 垂直的直線，並相交於 **Q** 點，
就可得出從 **P** 點到直線 **L** 的**最短路線**，
PQ 的長度就是 **P** 點到直線 **L** 的距離。

點到直線的距離

點與直線的距離是學習

- ✓ 平行線

- ✓ 對稱圖

- ✓ 底高配對的基礎

平行線檢測法



沿着下圖的公路行駛，能否到達河邊？為甚麼？



公路（直線 M）



小河（直線 K）





我是這樣想的！



公路（直線 M）



小河（直線 K）



延長直線 M 與直線 K 後，它們（會 / 不會）相交，



所以 沿着公路行駛，最後（能 / 不能）到達河邊。

如果  沿着下圖的公路行駛，它能否到達河邊？

為甚麼？



公路（直線 L）



小河（直線 K）





公路 (直線 L)



小河 (直線 K)



沿着公路 (直線 L) 行駛，好像不能到達河邊！

無法做到無限延長這兩條直線，
該怎樣判斷直線 L 與直線 K 會不會相交？



平行線檢測法

平行線檢測法

平行線檢測法

平行線檢測法



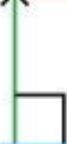
可以量度公路不同位置與河邊的距離
有沒有改變，就知道公路與小河會不會
相交了。



公路 (直線 L)



小河 (直線 K)



現在  與河邊的

距離是：



行駛了一段路後



公路 (直線 L)



小河 (直線 K)



現在  與河邊的

距離是：



量度得 和 的長度（相同 / 不相同），發現：



走了一段路後，（有 / 沒有）接近河邊。

所以



沿着公路走，（能 / 不能）到達河邊。

把直線 L 和直線 K 不斷延長，它們（會 / 不會）相交。

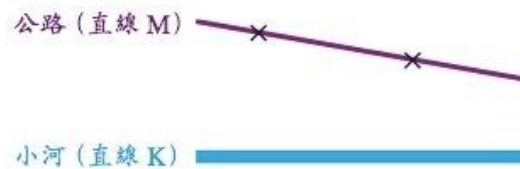
如果直線 L 上不同的兩點與直線 K 的距離相同，
那麼，直線 L 與直線 K 無論怎樣延長都不會相交，
便稱「直線 L 和直線 K 互相平行」、
「直線 L 平行於直線 K」或「直線 K 平行於直線 L」。

也可以說：直線 L 是直線 M 的一條平行線；
或 直線 M 是直線 L 的一條平行線。



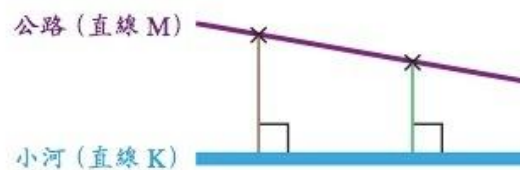
步驟 1

在直線 M 上任意取兩點。



步驟 2

從這兩點各畫一條直線，使它們垂直於直線 K。



量度得 和 的長度 (相同 / 不相同)，發現：

直線 M 和直線 K 不斷延長後 (會 / 不會) 相交。

直線 M 和直線 K (是 / 不是) 互相平行。

對稱的教學佈局

- ✓ 開始時集中考慮沒有色彩或陰影變化的圖形
- ✓ 介紹準確定義，多做口答練習
- ✓ 藉點到直線的距離在白紙上畫出對稱圖的缺去部分



圖 1

圖 2

左面兩個平面圖形
相同嗎？為甚麼？



圖 1 是一個對稱圖形。

如果我們可以找到一條直線，使得沿該直線把圖形對摺，直線兩邊的圖形部分可以完全重疊，便稱此圖形為**對稱圖形**；同時，該**直線**稱為圖形的**對稱軸**。





我可以在畫紙上畫一個對稱圖形嗎？

當然可以，但你要先認識構成圖形的「點」。



右面是一個對稱圖形，虛線 **S** 是對稱軸。

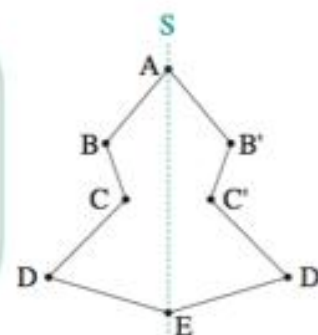


把圖形沿虛線 **S** 對摺，原點便與對應點重疊，

即 B (原點) 與 B' (對應點) 重疊；

C (原點) 與 C' (對應點) 重疊；

D (原點) 與 D' (對應點) 重疊。



那麼原線也與它的對應線重疊了，

即 AB (原線) 與 AB' (對應線) 重疊；

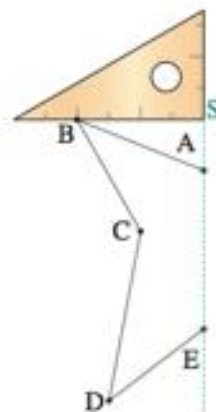
即 BC (原線) 與 B'C' (對應線) 重疊；

即 CD (原線) 與 C'D' (對應線) 重疊；

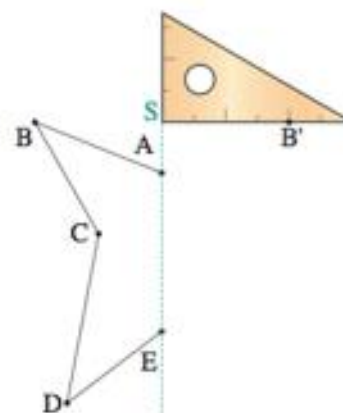
即 DE (原線) 與 D'E (對應線) 重疊。



可以考慮這些點與對稱軸的距離。

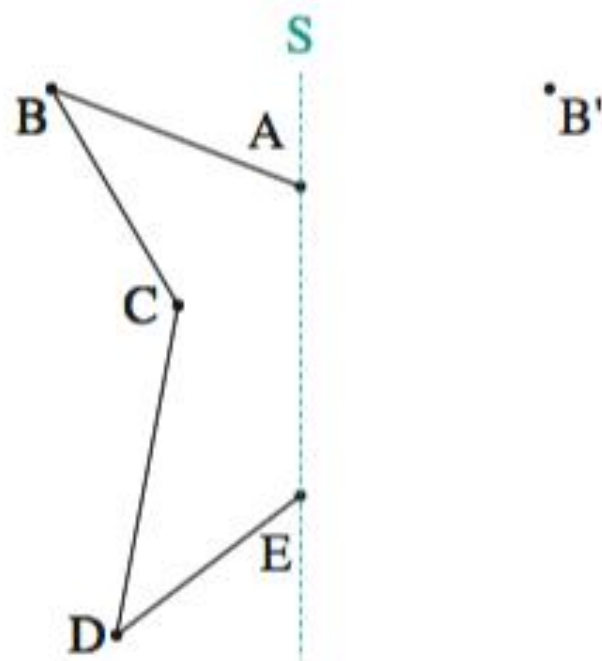


用直角尺找出 B 點與對稱軸的距離。



把直角尺沿對稱軸翻到另一邊，在相同距離處點出 B'。

我可以用相同的方法找出 C 和 D 的對應點 C' 和 D'，然後把各對應點順序連起來便成了。



對稱的教學佈局

對稱的教學佈局

你能找出這些圖形的對稱軸嗎？

對於以下的圖形，我們可同時考慮它的內部是否也對稱。



右圖是一面瑞典國旗，它有多少條對稱軸？

如果只考慮國旗的外框，

它共有 條對稱軸。

如果把圖形的內部也一併考慮，

則它只有 條對稱軸。



有時我們甚至要把圖形的顏色和質料也一併考慮，才能判斷該圖形是否對稱。

底高配對

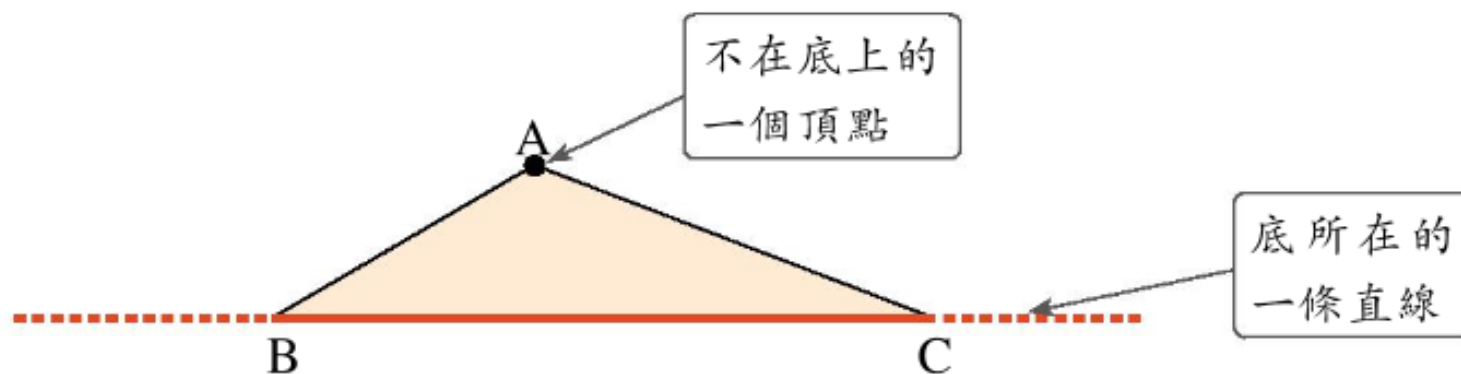
- ✓ 底高配對要細緻地處理
(一點至底所在**直線**的距離)
- ✓ 三角形的底高配對
- ✓ 四邊形的底高配對 (新課程)

三角形的高



從「不在底上的一個頂點」畫一段垂直線到「底」所在的一條直線上，該段垂直線就是對應該條底的「高」了。

 試在下圖畫出對應 BC 的高。

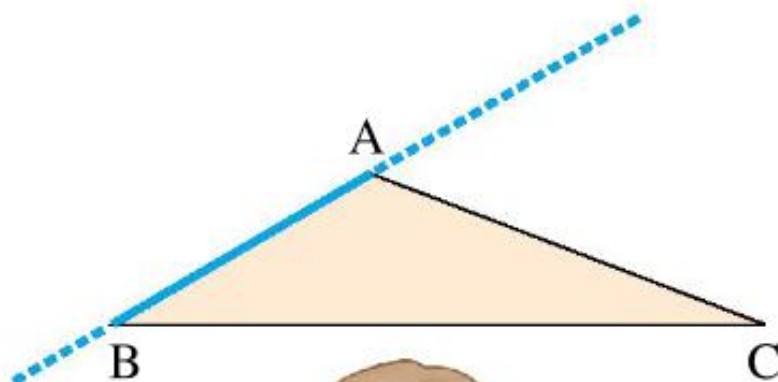


三角形的高

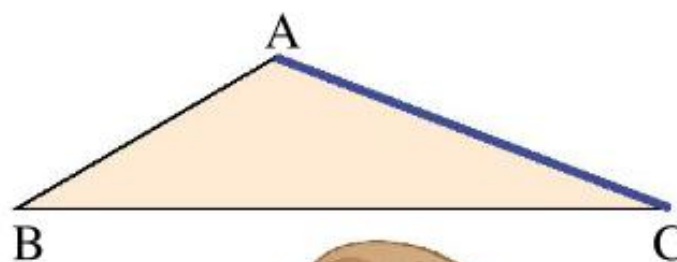
2. 卓妍和梓峯分別選了另外兩條邊 (AB 和 AC) 作為三角形的底，在下圖畫出它們對應的高。



先找出底所在的一條直線。



卓妍



梓峯

任何三角形都有三組底和高，三角形的任何一條邊都可以是底，由「不在底上的一個頂點」到底的一段垂直線就是對應該條底的高。

四邊形的底高配對（新課程）

度量範疇			
5M1 面積(二)	1. 認識三角形和四邊形高的概念	8.5	學生只須認識三角形和凸四邊形各條邊對應的高。 學生不須使用「凸四邊形」一詞。

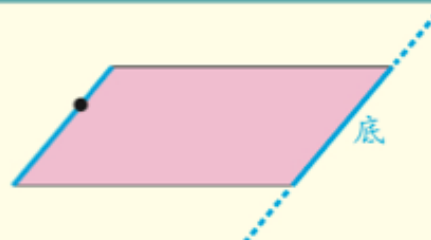
平行四邊形底高配對

為另一對底找對應的高：

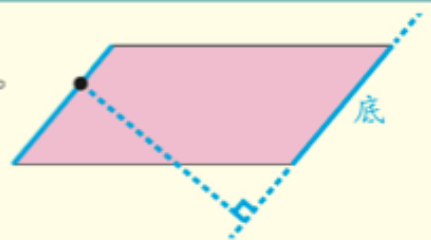
- 1 在平行四邊形的一條底
任意取一點。



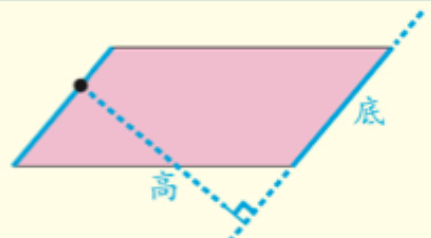
- 2 找出對面的「底」所在
的一條直線。



- 3 由選取的一點畫一垂直線
至對面的底所在的直線上。

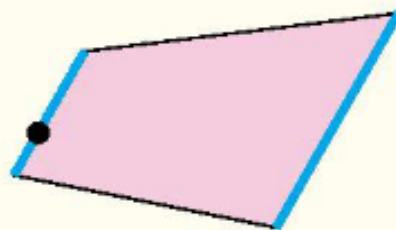


- 4 畫得的一段垂直線就是兩
條平行線的距離，即兩條
底對應的「高」。

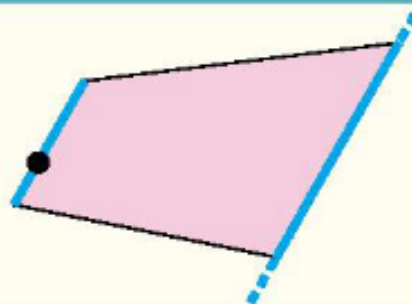


梯形底高配對

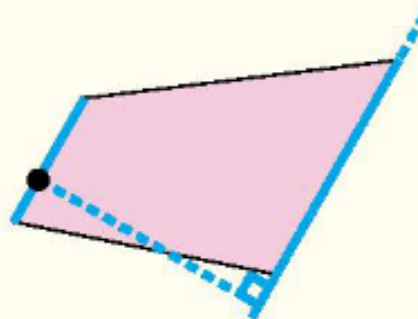
- 1 先找出梯形的一對平行邊為「上底」和「下底」。
在其中一條底任意取一點。



- 2 找出對面的「底」所在的一條直線。

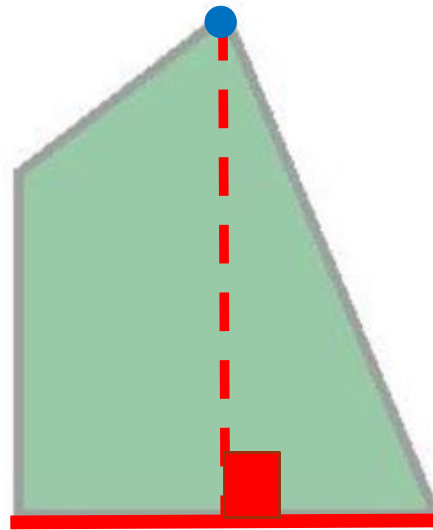


- 3 由選取的一點畫一條垂直線至對面的底所在的直線上，
畫得的一段垂直線就是梯形的「高」。

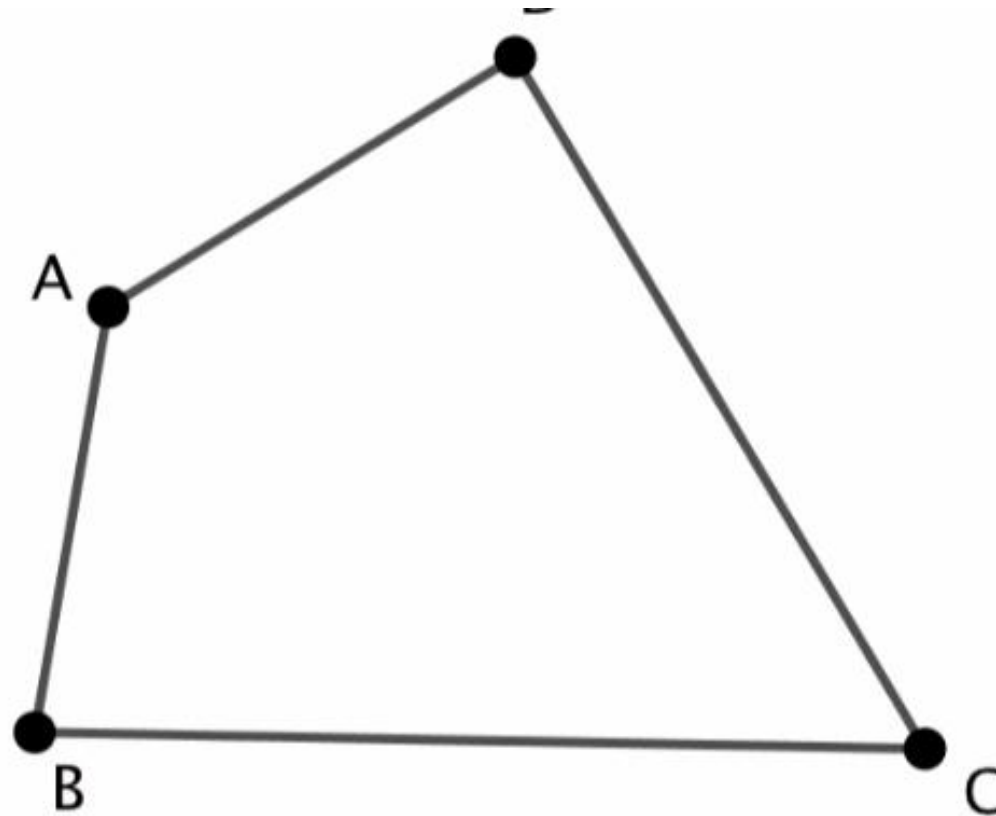


四邊形的底高配對（新課程加入）

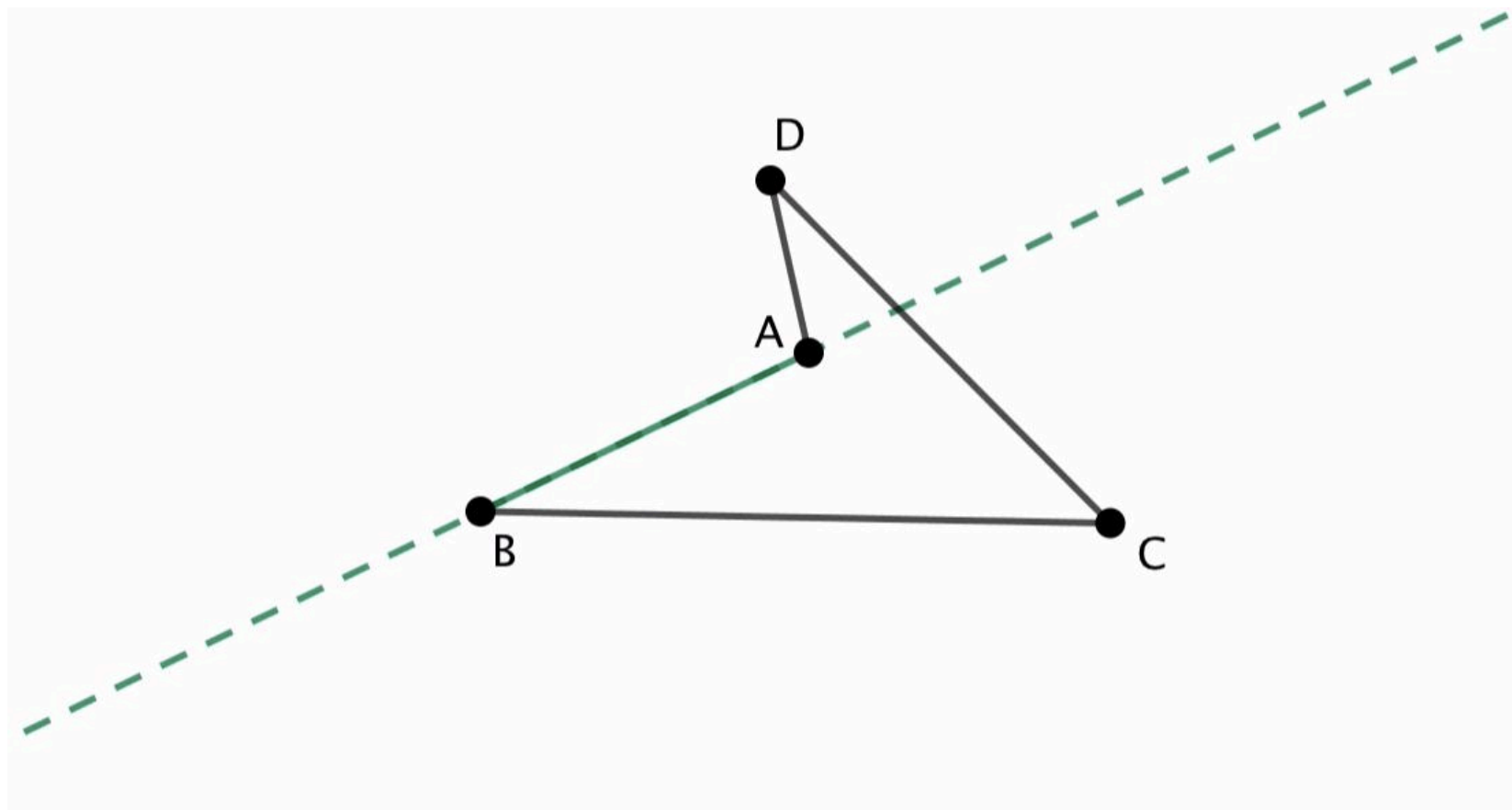
當整個四邊形都在某一邊的同一方時，四邊形相對於這條邊的高就是連接離四邊形這一邊所在直線最遠的點與這一邊的一段垂直線。



四邊形的底高配對（新課程加入）



四邊形的底高配對（新課程加入）



參考資料

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

香巧玲、馮振業（2011）。小學課程中的長度、路程和距離。《數學教育》31期，22–35。（後收入葉治浩、張淑儀、黃宇詩、黃錦雪。（編）（2015）。《小學數學教育文集2015：決心與智慧的展現》（頁200–213）。香港：香港數學教育學會。）

楊思敏（2007）。數學化教學：垂直和平行。載梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信（編）。《香港數學教育會議2007論文集》（頁173–179）。香港：香港數學教育學會。

董麗紅、李蘊珍、馮振業（2000）。小一長度量度的教學。載梁興強（編）。《香港數學教育會議2000論文集》（頁102–108）。香港：香港教育學院數學系。（後收入吳丹（編）（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》（頁237–243）。香港：香港數學教育學會。）